Travaux dirigés de mathématiques 2014–2015

Marc Robini

Département du 1er cycle, filière ASINSA, 2ème année

I. Séries numériques

Exercice 1

1. Montrer : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (a+b)^2 \geqslant 4ab$.

2. Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes réels positifs convergentes.
Montrer que la série $\sum_n \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Exercice 2

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série réelle ou complexe et soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles associée.

1. Exprimer S_{2n} $(n \in \mathbb{N}^*)$ en fonction des sommes partielles des séries $\sum_n u_{2n}$ et $\sum_n u_{2n+1}$.

2. Montrer que si $\sum_n u_{2n}$ converge et $\sum_n u_{2n+1}$ diverge, alors $\sum_n u_n$ diverge.

Exercice 3

Soit $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ la série de terme général $u_n = 1/\sqrt{n}$ et soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles associée.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.

2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad 2\sqrt{n} - 1 \geqslant S_n > 2\sqrt{n+1} - 2$.

Exercice 4 *Convergence de la série* $\sum_n 1/n!$

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ la série de terme général $u_n = 1/n!$.

1. Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

2. a) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n à la fonction exponentielle entre 0 et 1.

b) En déduire la somme S de $\sum_n u_n$ ainsi qu'un majorant du $n^{\text{ème}}$ reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

3. On note S_n la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de $\sum_n u_n$. Soit $(S'_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$S'_n = S_n + 1/(nn!)\,.$$

a) Montrer que les suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(S'_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n < 1/(nn!)$.

Exercice 5 *Séries géométriques*

Calculer la somme des séries de terme général :

a) $\begin{cases} x^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, où $x \in \mathbb{C}^*$ est tel que $|x| > 1$,

b) $x^n \mathrm{ch}(n\theta)$ et $x^n \mathrm{sh}(n\theta)$, où $(x, \theta) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$ est tel que $|x| < \mathrm{e}^{-|\theta|}$,

c) $x^n \cos(n\theta)$ et $x^n \sin(n\theta)$, où $(x, \theta) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$ est tel que $|x| < 1$.

Exercice 6 *Séries télescopiques*

Calculer la somme des séries :

a) $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^{-1}$, b) $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{2}{n(n^2-1)}$,

c) $\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(\dfrac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{\ln n\,\ln(n+2)}\right)$, d) $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$,

e)† $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}$, $x\in\mathbb{C}$, $|x|\neq 1$.

† Noter que $\dfrac{z}{z^2-1}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z^2-1}$ pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$.

Exercice 7

Déterminer la nature des séries de terme général :

a) $1/n!-1/\sqrt{n}$, b) e^{ina}/n^3, $a\in\mathbb{R}$,

c) $\big(n!+\sqrt{n}\big)^{-1}$, d) $\big(1+\sqrt{n}\big)^{-n}$,

e) $n^{-(1+1/\sqrt{n})}$, f) $\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^{\ln n}$,

g) $\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$, $a,b\in\mathbb{R}$, h) $\sin^2\big(1/n^a\big)$, $a\in\mathbb{R}$,

i) $a-(1+1/n)^n$, $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit $a\in\mathbb{R}_+$ et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a^k)$.

1. Montrer que si $a\in\,]0,1[$, alors $(u_n)_n$ converge vers un réel $\ell>1$.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $v_n=1/(n^a u_n)$.

Exercice 9

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n=n\ln\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)-1$.

1. a) Établir : $u_n=\dfrac{2n+3}{3(2n-1)^3}+\underset{+\infty}{\mathcal{O}}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

(utiliser le développement limité à l'ordre 3 en 0 de l'application $f:x\in\,]-1,+\infty[\,\mapsto\ln(1+x)$).

b) En déduire : $\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\implies 0<u_n<1/(11n^2)$.

2. a) En comparant $1/k^2$ à une intégrale, montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$$

pour tout couple $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $m>n\geqslant 1$.

b) En déduire que le $n^{\text{ème}}$ reste de la série $\sum_n u_n$ vérifie $0<R_n<1/(11n)$ lorsque n est suffisamment grand.

Exercice 10

Déterminer la nature des séries de terme général :

`a)` $\dfrac{\ln(n+2)}{2^{n-1}}$, `b)` $2^{(-1)^n-n}$,

`c)` $\big(3+(-1)^n\big)^{-n}$, `d)` $(a-1/n)^{2n}$, $a\in\mathbb{R}$,

`e)` $\left(\dfrac{n}{n+a}\right)^{n^2}$, $a\in\mathbb{R}$, `f)` $(1-1/\ln n)^n$,

`g)` $\big(\sqrt{n}\,(\ln n)^{\ln(\ln n)}\big)^{-1}$.

Exercice 11 *Comparaison d'une série avec une intégrale*

Soient $n_0\in\mathbb{N}$, $f:[n_0,+\infty[\,\to\mathbb{R}_+$ une application continue par morceaux et décroissante. On note respectivement S_n et R_n la $n^{\text{ème}}$ somme partielle et le $n^{\text{ème}}$ reste de la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$.

1. Montrer que si $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge, alors

$$\forall n\geqslant n_0,\qquad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\ \leqslant\ R_n\ \leqslant\ \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2. `a)` Montrer : $\forall n>n_0,\quad S_n-f(n_0)\ \leqslant\ \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\ \leqslant\ S_{n-1}\,.$

`b)` En déduire que si $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ diverge, alors

$$\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\ \underset{+\infty}{\sim}\ S_n\,.$$

3. Déterminer un équivalent du $n^{\text{ème}}$ reste d'une série de Riemann convergente et un équivalent de la $n^{\text{ème}}$ somme partielle d'une série de Riemann d'exposant $\alpha\in[0,1]$.

Exercice 12

Déterminer la nature des séries de terme général :

`a)` $\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$, `b)` $\dfrac{\mathrm{e}^{ina}}{\ln\big(n+(\sin n)/2\big)}$, $a\in\mathbb{R}$,

`c)` $(-1)^n\big(\mathrm{e}^{(-1)^n/\sqrt{n}}-1\big)$, `d)` $(-1)^n\,\mathrm{e}^{(-1)^n-\sqrt{n}}$,

`e)` $\dfrac{\sin^2 n}{n}$, `f)` $\sin\big(n^{-1/3}\sin n\big)$,

`g)` $\ln\big(1+(-1)^n/\sqrt{n}\big)$, `h)` $\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin^2 n}$,

`i)` $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, `j)` $\dfrac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}$,

`k)` $\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\,\sin\big(1/\sqrt{n}\big)}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 13 *Produit de Cauchy*

Pour $z\in\mathbb{C}$, on définit $\exp(z):=\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$. Montrer : $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2,\ \exp(z+z')=\exp(z)\exp(z')$.

Exercice 14 *Principe des dominos*

Soient $(u_n)_n$ une suite de nombres réels ou complexes et $\sum_n v_n$ la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $\sum_n v_n$ converge si et seulement si $(u_n)_n$ converge. En cas de convergence, quelle relation existe t-il entre la limite de $(u_n)_n$ et la somme de $\sum_n v_n$?

Exercice 15 *Constante d'Euler*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln n$.

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général $a_n = S_n - \ln n$.

a) Montrer que $(a_n)_n$ converge en étudiant la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ définie par

$$\begin{cases} u_1 = a_1 \\ \forall n \geqslant 2,\ \ u_n = a_n - a_{n-1} \end{cases}.$$

b) La limite de $(a_n)_n$, notée γ, est appelée *constante d'Euler*. Montrer :

$$\gamma = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{E}(x)} - \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x\,,$$

où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

c) Montrer : $a_n - \gamma \underset{+\infty}{\sim} 1/(2n)$ (on admettra que si deux séries à termes dans $\mathbb{R}_+$ convergentes ont des termes généraux équivalents, alors les restes de ces séries sont équivalents).

Exercice 16 *Formule de Stirling*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n!}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ de terme général $v_n = \ln(u_{n+1}/u_n)$ converge.

2. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ strictement positif.

3. a) Justifier que $n! \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\ell}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

b) Exprimer $\sqrt{\pi}$ en fonction de ℓ à l'aide de la *formule de Wallis* : $\pi = \lim\limits_{n\infty} \dfrac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2}$.

En déduire la *formule de Stirling* :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Travaux dirigés de mathématiques 2014–2015

Marc Robini

Département du 1er cycle, filière ASINSA, 2ème année

II. Suites et séries d'applications

Exercice 1

1. Déterminer le domaine et la limite de convergence simple des suites d'applications de terme général :

a) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n$, b) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n(1-x)$,

c) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(nx)$, d) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x\arctan(nx)$.

2. Déterminer si chacune de ces suites converge uniformément sur son domaine de convergence simple. Si cela n'est pas le cas, préciser des intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme.

Exercice 2

Soit $(f_n : \mathbb{K} \to \mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément vers une application f.

1. Montrer : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ n \geqslant m \geqslant N \ \Rightarrow\ f_n - f_m = \text{constante}$ (utiliser le critère de Cauchy pour la convergence uniforme).

2. En déduire que f est une fonction polynôme.

Exercice 3

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites d'applications de terme général :

a) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto n^a x\,\mathrm{e}^{-nx}, \quad a \in \mathbb{R}$, b) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x\,\mathrm{e}^{x/n}$,

c) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} 1/(x+1) & \text{si } x \in [0,n[\\ 0 & \text{si } x \geqslant n \end{cases}$, d) $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in]0,1/n[\\ 1/x & \text{si } x \geqslant 1/n \end{cases}$,

e) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1-n|x| & \text{si } |x| \leqslant 1/n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, f) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{1+nx}$,

g) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x\, \cos^n x$, h) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin^2(nx)}{n\,\sin x} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}$.

Exercice 4

On considère les suites d'applications de termes généraux

$$f_n : x \in [0,1] \mapsto nx(1-x)^n, \qquad g_n : x \in [0,1] \mapsto n^2x(1-x)^n$$

$$\text{et} \quad h_n : x \in [0,1] \mapsto \begin{cases} (-1)^n\, n^3x(1/n-x) & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Vérifier que $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ et $(h_n)_n$ convergent simplement mais non uniformément.
2. En posant successivement $\varphi_n = f_n$, $\varphi_n = g_n$ et $\varphi_n = h_n$, comparer
$$\lim_{n\infty} \int_0^1 \varphi_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 \varphi\,,$$
   où φ désigne la limite simple de $(\varphi_n)_n$.

Exercice 5

On s'intéresse à la suite d'applications $(f_n : [-1,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1,1], \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}\,.$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers une application f que l'on précisera.
2. Montrer que la suite $(f'_n)_n$ des applications dérivées converge simplement sur $[-1,1]$ vers une application g que l'on précisera. La suite $(f'_n)_n$ converge t-elle uniformément ?

Exercice 6

Étudier la convergence (simple, absolue, uniforme, normale) des séries d'applications $\sum_n f_n$ suivantes :

a) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$,

b) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n \exp(-n^2x)$,

c) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in [n, n+1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

d) $f_n : x \in [-\alpha, \alpha] \mapsto \dfrac{(-1)^n(x^2+n)}{n^2}$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

e) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{nx^2}{n^3+x^2}$,

Exercice 7

On s'intéresse à la série $\sum_{n\geqslant 0} \big(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\big)$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

1. a) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ à la fonction cosinus entre 0 et x.
   b) En déduire que $\sum_n f_n$ converge simplement vers la fonction cosinus.
   (On rappelle que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\big(n/\mathrm{e}\big)^n$.)
2. Montrer que $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout intervalle borné.

Exercice 8

On considère la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} \big(f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\big)$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n+n^3x^2}\,.$$

1. Déterminer le domaine de convergence simple D de cette série.

2. Vérifier que $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout intervalle du type $[\alpha, +\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

3. a) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} f_k\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{10}$.

b) En déduire que $\sum_n f_n$ ne converge pas uniformément sur D.

4. On note S la somme de $\sum_n f_n$ sur D. Montrer que S est continue.

Exercice 9

On s'intéresse à la série $\sum_{n\geqslant 0} \big(f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\big)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} .$$

1. Vérifier que $\sum_n f_n$ converge simplement puis calculer sa somme.

2. Calculer le $n^{\text{ème}}$ reste de $\sum_n f_n$. En déduire les intervalles sur lesquels $\sum_n f_n$ converge uniformément.

Exercice 10

On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \big(f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\big)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(1+nx)} .$$

1. Montrer que $\sum_n f_n$ converge uniformément.

2. On note S la somme de $\sum_n f_n$. Établir : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \displaystyle\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(1+nx)}{n^2}$.

3. a) Montrer que S est de classe C^1 sur tout intervalle $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$.

b) En déduire que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11

On s'intéresse à la série $\sum_{n\geqslant 1} \big(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\big)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^{2n}}{2n} .$$

1. Préciser le domaine de convergence simple de $\sum_n f_n$.

2. Soit $a \in]0,1[$. Montrer que la série dérivée $\sum_n f_n'$ converge uniformément sur $[-a,a]$ vers l'application $\psi : x \in [-a,a] \mapsto x/(1-x^2)$.

3. a) Déterminer la somme de $\sum_n f_n$ sur $[-a,a]$ ($a \in]0,1[$) en utilisant le théorème sur convergence uniforme et dérivation. L'expression obtenue est-elle valable sur $]-1,1[$?

b) Retrouver le résultat de la question 3.a à l'aide du théorème sur convergence uniforme et intégration.

Exercice 12

Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} \big(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\big)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\sin(n\omega x)}{n} .$$

1. Montrer que $\sum_n f_n$ converge simplement.

2. Montrer que $\sum_n f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme

$$\left[\frac{2l\pi}{\omega}+\alpha,\ \frac{2(l+1)\pi}{\omega}-\alpha\right], \qquad (l,\alpha)\in\mathbb{Z}\times\,]0,\pi/\omega[$$

(utiliser la règle d'Abel uniforme).

3. Montrer que la somme de $\sum_n f_n$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus(2\pi/\omega)\mathbb{Z}$.

Exercice 13

Soit $a\in\,]1,+\infty[$. On s'intéresse à la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ de terme général $u_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_1^a(\ln t)^n\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\sum_n u_n$ converge sans chercher à calculer $\displaystyle\int_1^a(\ln t)^n\mathrm{d}t$.

2. Calculer la somme de $\sum_n u_n$ en faisant appel au théorème sur convergence uniforme et intégration sur un segment pour une série d'applications.

Exercice 14 *Fonction zêta de Riemann*

On s'intéresse à la série $\sum_{n\geqslant 1}\big(f_n:\,]1,+\infty[\,\to\mathbb{R}\big)$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in\,]1,+\infty[\,,\quad f_n(x)=\frac{1}{n^x}\,.$$

1. Vérifier que $\sum_n f_n$ converge simplement. On note, pour $x\in\,]1,+\infty[$, $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

2. Soit $\alpha\in\,]1,+\infty[$. La série $\sum_n f_n$ converge t-elle uniformément sur $[\alpha,+\infty[$?

3. On note R_n le $n^{\text{ème}}$ reste de $\sum_n f_n$.

a) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in\,]1,+\infty[$, $\quad\dfrac{1}{(x-1)(n+1)^{x-1}}\leqslant R_n(x)\leqslant\dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\zeta(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$.

c) La série $\sum_n f_n$ converge t-elle uniformément sur $]1,+\infty[$?

4. a) Montrer que ζ est de classe C^1 sur tout intervalle de la forme $[\alpha,\beta]$, $1<\alpha<\beta$.

b) ζ est-elle de classe C^1 sur $]1,+\infty[$?

Exercice 15

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x\in[-1,1],\quad f_n(x)=\frac{x^n\sin(nx)}{n}\,.$$

1. a) Établir : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[-1,1]$, $\quad\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^k\sin(kx)\right|\leqslant\dfrac{2}{|1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|}$.

b) Montrer que l'application $x\in[-1,1]\mapsto|1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|$ est minorée par un réel $m>0$.

c) En déduire que $\sum_n f_n$ converge uniformément à l'aide de la règle d'Abel.

2. On note S la somme de $\sum_n f_n$.

a) Montrer que S est de classe C^1 sur tout intervalle de la forme $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha\in\,]0,1[$.

b) Soit $x \in]-1,1[$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos(nx)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin(nx)$.

c) Montrer : $\forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = \dfrac{\sin x + x\cos x - x^2}{1 - 2x\cos x + x^2}$.

d) Soit $h : x \in [-1,1] \mapsto \arctan\left(\dfrac{x \sin x}{1 - x\cos x}\right)$. Montrer que $S(x) = h(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

e) Peut-on prolonger le résultat de la question 2.d à $[-1,1]$?

Travaux dirigés de mathématiques 2014–2015

Marc Robini

Département du 1er cycle, filière ASINSA, 2ème année

III. Algèbre bilinéaire

Exercice 1

On considère l'application bilinéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x, y) \;=\; x_1y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 + 2x_1y_3 + 5x_4y_4 - x_2y_4 + 2x_4y_3\,,$$

où x_1, x_2, x_3, x_4 et y_1, y_2, y_3, y_4 sont les coordonnées de x et de y dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

2. L'application φ est-elle symétrique ? anti-symétrique ?

3. Écrire φ comme la somme d'une application bilinéaire symétrique φ_{S} et d'une application bilinéaire anti-symétrique φ_{A}.

4. Quelle est la forme quadratique q associée à φ ?

5. Quelle est la forme polaire associée à q ?

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $q : E \to \mathbb{R}$ une application.

1. Montrer que q est une forme quadratique si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \texttt{(i)}\;\; \forall \alpha \in \mathbb{R},\;\; \forall x \in E,\;\; q(\alpha x) = \alpha^2 q(x) \\ \texttt{(ii)}\;\; \varphi_q : (x, y) \in E^2 \;\mapsto\; \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big) \;\text{ est une forme bilinéaire.} \end{cases}$$

2. On suppose E de dimension finie $n \geqslant 1$ et on considère une base $\mathcal{B}$ de E quelconque. Pour tout $x \in E$, on note $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$.

a) Montrer qu'une application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ est bilinéaire symétrique si et seulement s'il existe une matrice symétrique $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x, y) = {}^{\mathrm{t}}XAY$ pour tout $(x, y) \in E^2$.

b) En déduire que q est une forme quadratique si et seulement s'il existe une matrice symétrique $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $q(x) = {}^{\mathrm{t}}XAX$ pour tout $x \in E$.

Exercice 3

Soient $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bigg(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\bigg)^2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.

2. Écrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que q est définie-positive si $\|a\|_2 < 1$.

Exercice 4

Étant donné $a \in \mathbb{R}$, on considère la forme quadratique q_a sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad q_a(x, y, z) \;=\; x^2 + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 + 2xy - 2ayz.$$

1. Déterminer une décomposition de q_a en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes à l'aide de la méthode de Gauss. En déduire le rang et la signature de q_a.

2. a) Écrire q_a sous la forme

$$q_a(x, y, z) \;=\; {}^{\mathrm{t}}X\, {}^{\mathrm{t}}PDPX,$$

où $D \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ est diagonale, $P \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ et ${}^{\mathrm{t}}X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.

b) La matrice P est la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

◇ Quelle est la spécificité de $\mathcal{B}$?

◇ Donner les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique.

c) On suppose $a > 0$. Donner une base q_a-orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$, $q : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall P \in E, \quad q(P) \;=\; P(0)P(1).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.

2. Écrire la matrice de q dans la base canonique de E.

3. a) Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

b) En déduire une base q-orthogonale de E.

4. La forme q est-elle positive ? négative ? définie ?

5. a) Déterminer le cône isotrope de q, c'est-à-dire l'ensemble $C(q) = \{P \in E \mid q(P) = 0\}$.

b) L'ensemble $C(q)$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

6. Soit $P = 1 + X + X^2$ et soit $V = \mathrm{Vect}(P)$. Déterminer $V^{\perp}$ puis $V^{\perp\perp}$.

Exercice 6

Soient $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \varphi(f, g) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} f\big(n^{-1}\big) g\big(n^{-1}\big).$$

1. Vérifier que φ est bien définie sur E^2.

2. Vérifier que φ est une forme bilinéaire symétrique.

3. La forme φ est-elle un produit scalaire sur E ?

4. Montrer que, pour toutes fonctions polynomiales $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on a

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} f\big(n^{-1}\big) g\big(n^{-1}\big) \right)^2 \;\leqslant\; \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} f^2\big(n^{-1}\big) \, \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} g^2\big(n^{-1}\big).$$

Exercice 7

Soit $n \geqslant 2$. On considère l'application $q : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad q(A) \;=\; \mathrm{Tr}(A^2)\,.$$

1. a) Montrer : $\forall A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\;\; \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

b) Montrer que q est une forme quadratique.

c) Quelle est la forme polaire associée à q ?

d) Déterminer une matrice isotrope non nulle pour q, c'est-à-dire une matrice $A_0 \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $q(A_0) = 0$ et $A_0 \neq 0_{\mathbf{M}_n(\mathbb{R})}$.

2. On note respectivement $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ constitués des matrices symétriques et anti-symétriques.

a) Montrer que la restriction de q à $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive.

b) Qu'en est-il de la restriction de q à $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$?

c) Montrer que $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont q-orthogonaux.

Exercice 8

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Vérifier que la base canonique de E n'est pas φ-orthogonale.

3. Construire une base φ-orthonormale à l'aide du processus d'orthogonalisation de Schmidt.

Exercice 9

1. Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \neq E$.

a) Montrer : $\forall (x, y) \in E^2, \quad x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

b) Justifier l'existence d'une base orthogonale $\{e_1, \ldots e_n\}$ de E telle que $\{e_1, \ldots, e_p\}$ $(p < n)$ soit une base de F.

c) Montrer que $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.

d) Soit $x \in E$. On désigne respectivement par x_F et $x_{F^\perp}$ les projections orthogonales de x sur F et sur $F^\perp$. Montrer que $x = x_F + x_{F^\perp}$.

2. On cherche à déterminer la quantité

$$\rho \;=\; \operatorname*{Inf}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi} (x \sin t + y \cos t - t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Pour ce faire, on considère le $\mathbb{R}$-ev $\Omega = C([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(f, g) \in \Omega^2 \mapsto \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

et on se place dans le sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(\sin, \cos, \mathrm{Id}_\Omega)$ (E est donc un espace euclidien).

a) Soit $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$. On pose $a = \mathrm{Id}_\Omega$.

◇ Montrer : $\forall u \in F,\;\; \|u - a\|^2 = \|u - a_F\|^2 + \|a\|^2 - \|a_F\|^2$.

◇ En déduire que $\rho = \|a\|^2 - \|a_F\|^2$.

b) Calculer la valeur de ρ.

Exercice 10

Diagonaliser la matrice symétrique réelle

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée formée de vecteurs propres.

Exercice 11

Étant donné $a \in \mathbb{R}$, on considère la forme quadratique q_a sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad q_a(x,y,z) \;=\; (a+1)(x^2+z^2) + ay^2 + 2(xy+yz)\,.$$

1. a) Écrire la matrice A de q_a dans la base canonique.

b) Diagonaliser A dans une base orthonormée formée de vecteurs propres.
Donner l'expression de q_a dans cette nouvelle base.

c) On note φ_a la forme polaire de q_a.
Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles φ_a est un produit scalaire ?

2. On suppose $a \neq -1$.

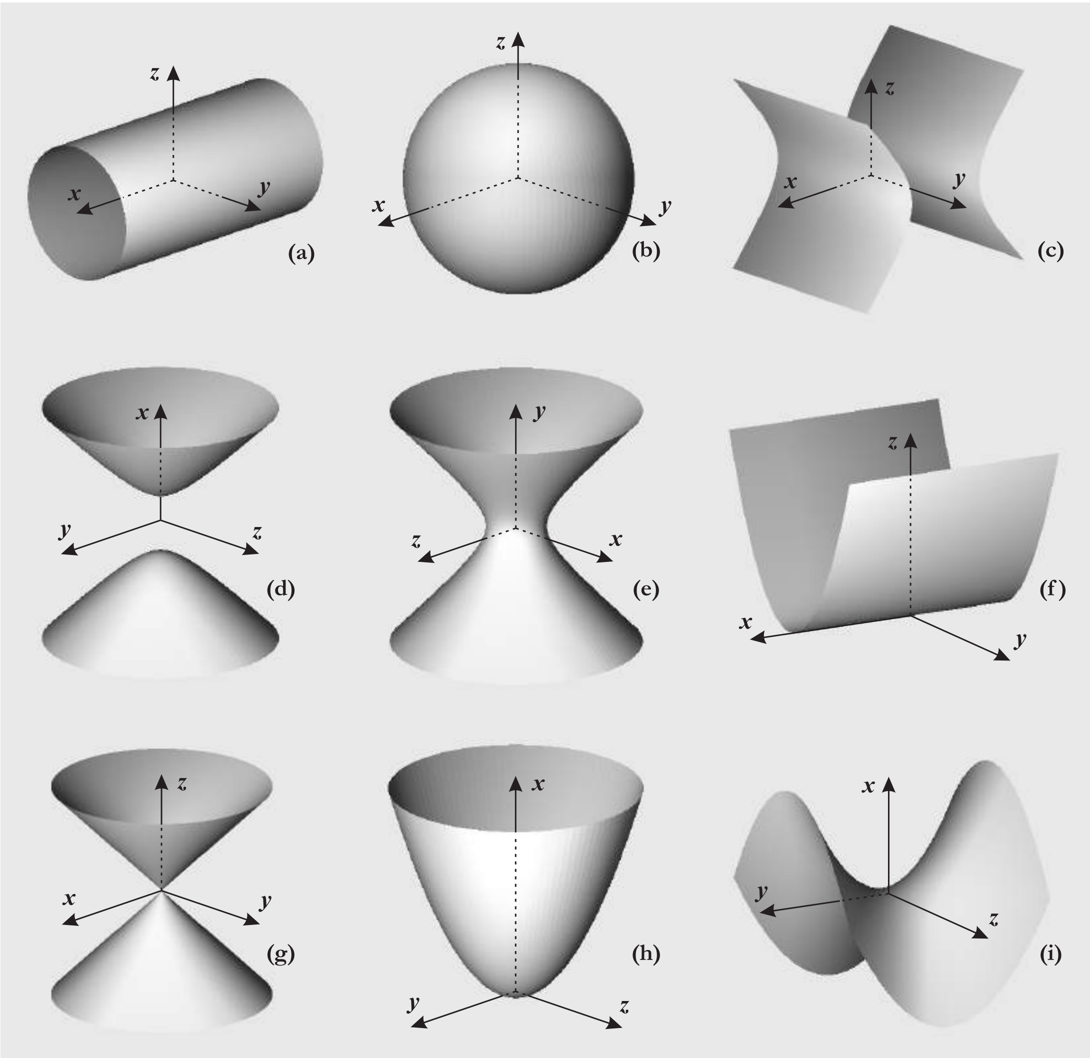
a) Décomposer q_a en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes à l'aide de la méthode de Gauss.

b) En déduire une matrice de passage Q telle que $A = {}^t\!QDQ$, où D est une matrice diagonale.
La nouvelle base définie par Q est-elle orthogonale pour le produit scalaire canonique ?

Exercice 12

Attribuer à chaque schéma représenté ci-après l'équation de la quadrique qu'il représente parmi les neuf possibilités qui suivent (préciser le type de la quadrique dans chacun des cas).

1. $x^2 + z^2 - y^2 = 1$	**2.** $x^2 - z^2 = 1$	**3.** $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
4. $y^2 - z^2 = x$	**5.** $y^2 + z^2 = 1$	**6.** $z - y^2 = 0$
7. $y^2 + z^2 = x$	**8.** $y^2 + z^2 - x^2 = -1$	**9.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



Exercice 13

On considère la quadrique S d'équation

$$y^2 - z^2 - 4xy + 4xz - x + y - 5z + 3 \ = \ 0$$

dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace affine euclidien de dimension 3.

1. *Réduction de S.*

a) Exprimer l'équation de S sous la forme

$$^{\mathrm{t}}XAX + {}^{\mathrm{t}}BX + C \ = \ 0\,,$$

où $^{\mathrm{t}}X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, $B \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathbb{R}$.

b) Diagonaliser A dans une base orthonormée $\{\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,'\}$.

c) Donner l'expression de S dans $(O\,;\,\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,')$.

d) Réduire l'expression obtenue en effectuant un changement d'origine.

e) Représenter schématiquement S.

2. Caractériser et représenter la conique définie par l'intersection de S et du plan d'équation $x = \alpha$ en fonction du paramètre réel α.

Exercice 14

Soit S la quadrique d'équation

$$x^2 + z^2 - 2xz + 8x + 2y + 5 \ = \ 0$$

dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace affine euclidien de dimension 3.

1. Réduire S et représenter schématiquement cette surface.

2. Représenter la conique définie par l'intersection de S et du plan d'équation $y = -5/2$.

Travaux dirigés de mathématiques 2014–2015

Marc Robini
Département du 1er cycle, filière ASINSA, 2ème année

IV. Espaces vectoriels normés

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $p \in \mathbb{N}^*$, $N_1, \dots, N_p$ des normes sur E, $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ un élément de $\mathbb{R}_+^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$. Montrer que l'application

$$\nu : x \in E \longmapsto \sum_{k=1}^{p} \alpha_k N_k(x)$$

est une norme sur E.

Exercice 2

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des $\mathbb{K}$-evn, $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ le $\mathbb{K}$-ev produit des E_k, $\| \,.\, \|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^p$. Montrer que l'application

$$\nu : x = (x_1, \dots, x_p) \in E \longmapsto \big\| \big(N_1(x_1), \dots, N_p(x_p)\big) \big\|_2$$

est une norme sur E.

Exercice 3

Soit $(E, \| \,.\, \|)$ un $\mathbb{K}$-evn. Montrer :

1. $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| + \|x - y\| \geqslant \|x\| + \|y\|$;
2. $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2, \quad \|x - y\| \geqslant \dfrac{1}{2} \max\big(\|x\|, \|y\|\big) \left\| \dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|} \right\|$.

Exercice 4

1. Soient $(E, \| \,.\, \|_E)$, $(F, \| \,.\, \|_F)$ deux $\mathbb{K}$-evn, $f : E \to F$ une application linéaire.
   a) Soit $\nu : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\nu(x) = \|f(x)\|_F$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que ν soit une norme sur E.
   b) On suppose f bijective.
   Montrer que l'application $\nu' : z \in F \mapsto \|f^{-1}(z)\|_E$ est une norme sur F.
2. Soit $N : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall A = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \qquad N(A) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

   Montrer que N est une norme sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5

À tout polynôme $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on associe les réels

$$\nu_\infty(P) = \sup_{k\in\{0,\dots,\deg(P)\}} |a_k|\,, \quad \nu_1(P) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} |a_k|\,, \qquad \nu_2(P) = \left(\sum_{k=0}^{\deg(P)} |a_k|^2\right)^{1/2},$$

$$N_\infty(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|\,, \qquad N_1(P) = \int_0^1 |P(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left(\int_0^1 |P(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Montrer que les applications ν_i et N_i de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définies ($i \in \{1, 2, \infty\}$) sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le singleton $\{1/n\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{1/n\}$ n'est ni ouvert, ni fermé dans $\mathbb{R}$.
3. Préciser l'intérieur et l'adhérence de A.

Exercice 7

Parmi les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants, indiquer ceux qui sont ouverts et ceux qui sont fermés.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$,

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$,

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leqslant -1\}$,

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |2x + 3y| \leqslant 1\}$,

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 \leqslant 1\}$,

f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\exists n \in \mathbb{Z}^*)[(x,y) = (n^{-1}, n^{-1})]\}$.

Exercice 8

Soient $E = C([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E définie par $f_n(x) = x^n$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_n$.
2. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_2$. Conclure quant à la convergence de $(f_n)_n$ dans $\big(E, \|\,.\,\|_1\big)$ et $\big(E, \|\,.\,\|_2\big)$.
3. a) Montrer que si $(f_n)_n$ converge dans $\big(E, \|\,.\,\|_\infty\big)$ vers une application f, alors il existe nécessairement un réel $a \in \,]0,1[$ tel que $f(a) = 1/2$.
   b) En déduire que $(f_n)_n$ diverge dans $\big(E, \|\,.\,\|_\infty\big)$.
   c) Pouvait-on parvenir plus facilement à cette conclusion ?

Exercice 9

On s'intéresse à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $E = C([0,1],\mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) \; = \begin{cases} n & \text{si } x \leqslant n^{-3} \\ x^{-1/3} & \text{si } x > n^{-3} \end{cases}.$$

1. Dessiner l'allure du graphe de f_n.
2. Montrer successivement que $(f_n)_n$ diverge dans $\big(E, \|\,.\,\|_\infty\big)$, $\big(E, \|\,.\,\|_1\big)$ et $\big(E, \|\,.\,\|_2\big)$.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On considère le $\mathbb{R}$-ev $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme $|||\,.\,|||$ induite par une norme $\|\,.\,\|$ sur

$\mathbb{R}^n$. Étant donnés $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note Ax l'image de x par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A relativement à la base canonique. Ainsi,

$$|||A||| \;=\; \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\;;\; x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}\right\}.$$

1. Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a $|\lambda| \leqslant |||A|||$ pour toute valeur propre réelle λ de A.

2. Montrer : $\forall A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),\ |||AB||| \leqslant |||A|||\,|||B|||$.

3. a) Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $|||A||| < 1$, la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle.

b) Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$A \;=\; \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

converge vers la matrice nulle.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On considère le $\mathbb{R}$-ev $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme $|||\,.\,|||$ induite par une norme $\|\,.\,\|$ sur $\mathbb{R}^n$. On note I_n la matrice unité d'ordre n et on considère une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $|||A||| < 1$.

1. a) Montrer que -1 n'est pas valeur propre de A.

b) En déduire que $\mathrm{I}_n + A$ est inversible.

2. a) Montrer que la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k A^k$ est de Cauchy (on pose $A^0 = \mathrm{I}_n$).

b) Montrer que $(S_p)_p$ converge.

3. a) Montrer que la suite $(\widetilde{S}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de terme général $\widetilde{S}_p = (\mathrm{I}_n + A)S_p$ converge vers I_n.

b) En déduire la limite de $(S_p)_p$.

c) Établir : $|||(\mathrm{I}_n + A)^{-1}||| \leqslant \big(1 - |||A|||\big)^{-1}$.

Exercice 12

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E = C^p([0,1], \mathbb{K})$ le $\mathbb{R}$-ev des applications de classe C^p de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et, pour tout $k \in \{1, \dots p\}$, $\nu_k : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\nu_k(f) \;=\; \|f^{(k)}\|_\infty \;+\; \sum_{i=0}^{k-1}\left|f^{(i)}(0)\right|.$$

.

1. Vérifier que, pour tout $k \in \{1, \dots p\}$, ν_k est une norme sur E.

2. Soient $k \in \{0, \dots, p-1\}$, $f \in E$, $x \in\,]0,1]$. Majorer la quantité $\left|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)\right|$ à l'aide du théorème des accroissements finis, puis en déduire

$$\forall f \in E, \quad \nu_k(f) \leqslant \nu_{k+1}(f)\,.$$

3. Le résultat qui précède indique que toute suite d'éléments de E convergeant dans (E, ν_{k+1}) converge également dans (E, ν_k). Vérifier que la réciproque est fausse en considérant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de E définie par

$$f_n(x) \;=\; \mathrm{e}^{-nx}/n^{k+1}.$$

Exercice 13

On considère l'application $\delta : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

1. Vérifier que δ est une distance sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la suite de terme général $u_n = n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, \delta)$ (on rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$).

3. En déduire que l'espace métrique $(\mathbb{R}, \delta)$ n'est pas complet.

Exercice 14

On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et on considère les normes usuelles $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sur E.

1. Montrer : $\forall f \in E,\ \|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$.

2. Montrer que $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes en considérant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par $f_n(x) = x^n$.

3. En déduire que E est de dimension infinie.

Exercice 15

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ nx & \text{si } x \in \,]0, n^{-1}] \\ 1 & \text{si } x \in \,]n^{-1}, 1] \end{cases}.$$

1. Dessiner l'allure des graphes de f_n et de f_m pour $m > n > 1$.

2. La suite $(f_n)_n$ converge t-elle dans $(E, \|\,.\,\|_\infty)$? Est-elle de Cauchy dans $(E, \|\,.\,\|_\infty)$?

3. a) Montrer que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(E, \|\,.\,\|_1)$.

b) On suppose que $(f_n)_n$ converge dans $\big(E, \|\,.\,\|_1\big)$ vers une application f. Montrer que cette hypothèse implique, d'une part, $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-1, 0]$ et, d'autre part, $f(x) = 1$ sur tout intervalle de la forme $[\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$.

c) En déduire que $(E, \|\,.\,\|_1)$ n'est pas complet.

Exercice 16

Soit $\alpha > 1$. Montrer que les applications f, $g_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} & \text{si } (x, y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad g_\alpha(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

sont continues en $0_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 17

On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}[X]$ et on considère les normes ν_1 et ν_2 sur $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$ associent respectivement

$$\nu_1(P) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} |a_k| \qquad \text{et} \qquad \nu_2(P) = \left(\sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k^2\right)^{1/2}.$$

Soit φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(1)$.

1. Vérifier que φ est 1-lipschitzienne si $\mathbb{R}[X]$ est muni de ν_1.

2. On munit $\mathbb{R}[X]$ de ν_2.

a) Montrer que φ est discontinue en $0_{\mathbb{R}[X]}$ en considérant la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} n^{-1} X^k.$$

b) Montrer que φ est discontinue en tout point.

Exercice 18

On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et on considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ qui à chaque élément f de E associe l'application $\varphi(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f)(x) = \int_0^1 f\big(t\sqrt{x}\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

1. La variable x étant supposée non nulle, appliquer le changement de variable $t = u/\sqrt{x}$ à $\varphi(f)(x)$. En déduire que φ est à valeurs dans E.

2. Montrer que $\varphi : (E, \|\,.\,\|_\infty) \to (E, \|\,.\,\|_\infty)$ est continue.

3. Montrer que $\varphi : (E, \|\,.\,\|_1) \to (E, \|\,.\,\|_\infty)$ est discontinue en tout point g de E en considérant la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E définie par $f_n(x) = g(x) + \mathrm{e}^{-nx}$.

Exercice 19

On s'intéresse à l'application $g : x \in \mathbb{R} \mapsto 2 - x - \mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha_2 \in \mathbb{R}_-^*$.

2. *Estimation de* α_1

a) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on écrit l'équation $g(x) = 0$ sous la forme $x = g(x) + x \overset{\text{déf.}}{=} f_1(x)$.
Soit $I_1 = [1,2]$. Calculer $k_1 = \sup_{x\in I_1} |f_1'(x)|$.
Le théorème du point fixe est-il applicable à f_1 dans l'intervalle I_1 ?

b) Comment peut-on estimer numériquement α_1 ? Au bout de combien d'itérations peut-on garantir une valeur approchée de α_1 à 10^{-3} près en partant de $x = 1$?

3. Pourquoi la démarche de la $2^{\text{ème}}$ question ne permet-elle pas d'estimer α_2 ?

4. *Estimation de* α_2

a) Pour $x \in \mathbb{R}_-$, transformer l'équation $g(x) = 0$ sous la forme $x = -\ln \phi(x) \overset{\text{déf.}}{=} f_2(x)$.
Montrer que le théorème du point fixe s'applique à f_2 dans l'intervalle $I_2 = [-2, -1]$.

b) Comment peut-on estimer numériquement α_2 ? Au bout de combien d'itérations peut-on garantir une valeur approchée de α_2 à 10^{-3} près en partant de $x = -1$?

Exercice 20

On se place dans $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \cdot \|_\infty$.

1. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ l'application qui à chaque élément f de E associe l'application

$$\varphi(f) : x \in [0,1] \longmapsto \varphi(f)(x) = x + \frac{f(x^2)}{2}\,.$$

a) Vérifier que $\varphi(E) \subset E$.

b) Montrer que φ est contractante.

c) Montrer qu'il existe une unique application $g \in E$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = x + \frac{g(x^2)}{2}\,.$$

2. On considère la série d'applications $\sum_{n \geqslant 0} \big(f_n : [0,1] \to \mathbb{R}\big)$ définie par

$$f_n(x) \;=\; x^{2^n}/2^n\,.$$

On note respectivement S_n et R_n la $n^{\text{ème}}$ somme partielle et le reste d'ordre n de $\sum_n f_n$.

a) Montrer que $\sum_n f_n$ converge uniformément.

b) Vérifier que $S_{n+1} = \varphi(S_n)$ pout tout $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que g est la somme de $\sum_n f_n$ puis majorer $\|R_n\|_\infty$.

Exercice 21

On se place dans $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\| \cdot \|_\infty$.

1. Soit $f \in E$. Justifier l'existence d'une unique primitive g_f de f telle que $\displaystyle\int_0^1 g_f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

2. On considère l'application $\varphi : f \in E \mapsto g_f$. Montrer :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad \varphi(f)(x) = \int_0^1 \left(\int_t^x f(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t\,.$$

3. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

4. Montrer : $\exists k \in [0,1[, \ \forall f \in E, \ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k\,\|f\|_\infty$.

5. Peut-on appliquer le théorème du point fixe à φ ? Si oui, préciser le point fixe de φ.

Exercice 22

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $A = [a_{ij}] \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On s'intéresse au système linéaire

$$\text{(S)} \quad AX = B \quad \text{d'inconnue } X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Étant donnée une norme $\| \,.\, \|$ sur $\mathbb{R}^n$, on munit $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme

$$\nu : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longmapsto \|(x_1, \ldots, x_n)\|$$

(on pourra noter $\|X\|$ au lieu de $\nu(X)$) et on munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $|||\,.\,|||$ induite par $\|\,.\,\|$.

1. a) Vérifier que résoudre (S) revient à résoudre le système $X = (\mathrm{I}_n - A)X + B$, où I_n est la matrice unité d'ordre n.

b) Montrer que si $|||\mathrm{I}_n - A||| < 1$, alors (S) admet une unique solution X^* qui est la limite de toute suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} X_0 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \forall k \in \mathbb{N}\,,\ X_{k+1} = (\mathrm{I}_n - A)X_k + B \end{cases}.$$

c) Majorer l'erreur commise en approchant X^* par X_k pour $X_0 = 0_{n,1}$.

On s'intéresse maintenant au système perturbé

$$(\mathrm{S}') \quad (A + \delta A)X = B$$

où A est supposée inversible et $\delta A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $|||\delta A||| < 1/|||A^{-1}|||$.

2. a) Vérifier que $A + \delta A$ est inversible à l'aide du résultat de la question 1.b de l'exercice 11.

b) On note $X^\dagger$ l'unique solution de (S$'$). Montrer :

$$\|X^\dagger - X^*\| \ \leqslant\ |||\,\mathrm{I}_n - (\mathrm{I}_n + A^{-1}\delta A)^{-1}|||\,\|X^*\|\,.$$

c) En déduire : $\|X^\dagger - X^*\| \ \leqslant\ \dfrac{|||A^{-1}|||\,|||\delta A|||}{1 - |||A^{-1}\delta A|||}\,\|X^*\|$

(utiliser le résultat de la question 3.b de l'exercice 11).

Exercice 23

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ donnés.

1. On se place dans $E = C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ muni de $\|\,.\,\|_\infty$.

a) Montrer que l'application $\varphi : E \to E$ définie par

$$\forall f \in E\,, \quad \forall x \in [0, \tfrac{1}{2}]\,, \quad \varphi(f)(x) = \int_0^x t^n \ln\bigl(1 + |f(t)|\bigr)\mathrm{d}t \ +\ x_0$$

est contractante.

b) Montrer que φ admet un unique point fixe f_0.

c) Montrer que f_0 est la solution qui prend la valeur x_0 en 0 d'une équation différentielle $(\mathcal{E})$ que l'on explicitera.

2. On se propose de prolonger le résultat de la $1^{\text{ère}}$ question à l'intervalle $[0, 2]$. On se place donc dans $E' = C([0, 2], \mathbb{R})$ et on considère l'application $\Phi : E' \to E'$ définie de la même façon que φ.

a) Vérifier, en considérant les applications constantes $f = 1$ et $g = 0$, que Φ n'est pas contractante lorsque E' est muni de $\|\,.\,\|_\infty$.

b) Montrer que l'application $\psi_n : E' \to E'$ définie par

$$\forall f \in E'\,, \quad \forall x \in [0, 2]\,, \quad \psi_n(f)(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-2^{n+1}x}$$

est un automorphisme de E'. Vérifier que l'application $N : f \in E' \mapsto \|\psi_n(f)\|_\infty$ est une norme sur E'.

c) Montrer que (E', N) est complet.

d) Montrer que Φ est contractante lorsque E' est muni de N.

e) Montrer que l'application f_0 déterminée dans la $1^{\text{ère}}$ question se prolonge de manière unique sur $[0, 2]$ en une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

Travaux dirigés de mathématiques 2014–2015

Marc Robini

Département du 1[er] cycle, filière ASINSA, 2[ème] année

V. Fonctions complexes d'une variable complexe

Exercice 1

Indiquer si les ensembles suivants sont des ensembles ouverts ou fermés. Donner leur adhérence et leur intérieur.

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \leqslant 0\}$, c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}$.

Exercice 2

1. Montrer que toute boule ouverte de $\mathbb{C}$ est un ensemble ouvert.

2. Montrer que toute boule fermée de $\mathbb{C}$ est un ensemble fermé.

Exercice 3

Indiquer si les ensembles suivants sont des ensembles ouverts ou fermés. Donner leur adhérence et leur intérieur.

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1 + \mathrm{i})| \leqslant 1\}$, b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ ou } |z - 4| < 1\}$,

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in]-1, 1[\}$, d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1 \text{ et } \mathrm{Arg}(z) \in]-\pi/2, \pi/2[\}$,

e) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3\mathrm{i}| > 1\}$.

Exercice 4

Pour chacune des applications f suivantes, étudier la limite de f en z_0.

a) $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 - 4z + 2 + 5\mathrm{i}$, $z_0 = 2 + \mathrm{i}$, b) $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \mapsto \dfrac{z^2 + 4z + 2}{z + 1}$, $z_0 = \mathrm{i}$,

c) $f : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \dfrac{\mathrm{Re}(z)^2}{z}$, $z_0 = 0$, d) $f : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \dfrac{z}{\overline{z}}$, $z_0 = 0$,

e) $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\} \mapsto \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{z - \mathrm{i}}$, $z_0 = \mathrm{i}$, f) $f : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \dfrac{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)^2}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^4}$, $z_0 = 0$,

g) $f : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{z}{\mathrm{Arg}(z)}$, $z_0 = 0$.

Exercice 5

Étudier la limite de l'application $z \in \mathbb{C}^* \mapsto \mathrm{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$ en $z_0 = -1$, $z_0 = 0$ et $z_0 = 1$.

Exercice 6

Étudier la continuité des applications suivantes.

a) $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{Re}(z)$, b) $z \in \mathbb{C} \mapsto \mathrm{Im}(z)$, c) $z \in \mathbb{C} \mapsto |z|$, d) $z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{z}$.

Exercice 7

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer le domaine de continuité de f et vérifier que f n'est pas prolongeable par continuité.

a) $f : z \mapsto \dfrac{z^4+1}{z^2+2z+2}$, b) $f : z \mapsto \dfrac{|z-1|}{z-1}$, c) $f : z \mapsto \dfrac{z}{|z|-1}$.

Exercice 8

Étudier la continuité en 0 de chacune des fonctions suivantes.

a) $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \begin{cases} \dfrac{z\mathrm{Re}(z)}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0\,, \end{cases}$ b) $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0\,, \end{cases}$

c) $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0\,. \end{cases}$

Exercice 9

Pour chacune des applications suivantes, préciser le domaine de dérivabilité et donner l'expression de la dérivée sur ce domaine.

a) $z \mapsto z^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$, b) $z \mapsto \big((z+1)^3 + 3(z+1)^2 + 3\big)^3$, c) $z \mapsto z^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$,

d) $z \mapsto \dfrac{z+\mathrm{i}}{z^2-1}$, e) $z \mapsto |z|^2$, f) $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$.

Exercice 10

Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On considère la suite d'applications $(f_n : U \to \mathbb{C})_{n \geqslant 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in U, \quad f_n(z) = \left(\frac{n}{2n+z}\right)^n.$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement.

2. Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on note D_α l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \geqslant \alpha\}$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur D_α pour tout $\alpha > 0$.

3. Montrer que la série d'applications $\sum_n f_n$ converge simplement.

4. Établir la convergence uniforme de $\sum_n f_n$ sur les ensembles D_α, $\alpha > 0$.

5. En déduire que la somme S de $\sum_n f_n$ est holomorphe sur U.

Exercice 11

On s'intéresse à la série d'applications $\sum_{n \geqslant 0}(f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad f_n(z) = \left(\frac{nz}{3n+4}\right)^n.$$

1. Déterminer le domaine de convergence simple D de cette série.

2. Montrer que la somme S de $\sum_n f_n$ est holomorphe sur D.

Exercice 12

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\cos(z) = 0$ et $\sin(z) = 0$.
2. En déduire les solutions des équations $\mathrm{ch}(z) = 0$ et $\mathrm{sh}(z) = 0$.

Exercice 13

1. Démontrer les relations suivantes pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.
   a) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$.
   b) $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$.
2. En déduire :
   a) $\mathrm{ch}(z_1 + z_2) = \mathrm{ch}(z_1)\mathrm{ch}(z_2) + \mathrm{sh}(z_1)\mathrm{sh}(z_2)$,
   b) $\mathrm{sh}(z_1 + z_2) = \mathrm{sh}(z_1)\mathrm{ch}(z_2) + \mathrm{ch}(z_1)\mathrm{sh}(z_2)$.

Exercice 14

On considère l'application $L : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \ln(|z|) + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z)$.

1. Montrer que L est discontinue en tout point de $\big\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0\big\} \overset{\text{not.}}{=} \Omega$.
2. Montrer : $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \exp(L(z)) = z$.
3. Montrer : $\forall z \in \big\{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(w) \in \,]-\pi, \pi]\big\},\ L(\exp(z)) = z$.
4. On note Log la restriction de L à l'ensemble $\mathbb{C}^* \setminus \Omega \overset{\text{not.}}{=} \mathbb{C}^\ddagger$.
   a) Montrer qu'il existe des couples $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^\ddagger)^2$ tels que $z_1 z_2 \notin \mathbb{C}^\ddagger$.
   b) Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\ddagger$ tels que $z_1 z_2 \in \mathbb{C}^\ddagger$,

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) + 2\mathrm{i}k\pi$$

.

Travaux dirigés de mathématiques 2014–2015

Marc Robini

Département du 1er cycle, filière ASINSA, 2ème année

VI. Séries entières

Exercice 1

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

1. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|a_n| \leqslant C|b_n|$ à partir d'un certain rang.

a) Montrer : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R_b \implies |z| \leqslant R_a$.

b) En déduire $R_a \geqslant R_b$.

2. En déduire que si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Exercice 2

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{pn+q}$ admet pour rayon de convergence $R^{1/p}$ (avec, par convention, $(+\infty)^{1/p} = +\infty$).

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes.

1. a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{n+p} z^n$ ont même rayon de convergence.

b) Montrer que les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

2. En déduire que les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Exercice 4

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} z^n$,

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \Big(\sin\big(\mathrm{i}(2-\sqrt{3})^n\big)\Big)^n z^n$,

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\prod_{k=1}^{n}(2k-\mathrm{i}) \Big/ \prod_{k=1}^{n} 2(k-\mathrm{i})\right) z^n$,

e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{\pi \ln n}{\pi + \ln n}\right)^{n+\sin(n)} z^n$,

f) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{3n}$,

g) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{2^{n(n+1)}} z^{n^2}$,

h) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\operatorname{sh} n)^a}{(\operatorname{ch} n)^b} z^n, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n\mathrm{e}^n} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch} k\right) z^n$,

j) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \left(\int_n^{n+1} \frac{\sin\left(t^{-1/2}\right)}{3^t \ln t}\,\mathrm{d}t\right) z^n$.

Exercice 5

1. Montrer : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.
2. Établir : $\displaystyle\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{C}^*}} \frac{\sin z}{z} = 1$.
3. En déduire les limites en 0 des applications

$$z \in \mathbb{C}^* \setminus \left\{ \left(k + \tfrac{1}{2}\right)\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\} \mapsto \frac{\tan z}{z} \qquad \text{et} \qquad z \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{1 - \cos z}{z^2}.$$

Exercice 6

On s'intéresse aux séries entières de la forme $\sum_{n \geqslant 0} n^p z^n$, $p \in \mathbb{N}$.

1. Quel est le rayon de convergence R de ces séries ?
2. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note S_p la somme de $\sum_{n \geqslant 0} n^p z^n$. Exprimer S_{p+1} en fonction de la dérivée de S_p sur $B(0, R)$.
3. En déduire l'expression de la somme de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} (n+2)^2 z^n$ sur $B(0, R)$.

Exercice 7

Pour les fonctions f qui suivent, montrer que f est développable en série entière en 0, calculer son DSE(0) et préciser le domainde de validité de celui-ci.

a) $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \sin^2 z$,

b) $f : x \in \left]-1, 1\right[\mapsto 2 \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) + \dfrac{2x}{1-x^2}$,

c) $f : z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \right\} \mapsto \dfrac{1}{z^2 + 2z + 4}$,

d) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x \operatorname{sinc}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \operatorname{sinc} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

Exercice 8

Pour les séries entières de la variable réelle qui suivent, préciser le rayon de convergence R et calculer la somme sur $\left]-R, R\right[$.

a) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{\cos(n\theta)}{n!} x^n, \quad \theta \in \mathbb{R}$, b) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, c) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{n+1} x^n$.

Exercice 9

Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_\lambda) \qquad xy'' + 2y' + \lambda xy = 0\,.$$

On suppose que (E_λ) admet des solutions développables en série entière en 0, c'est-à-dire qu'il existe une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ dont le rayon de convergence R est non nul et dont la somme

$$f : x \in \left]-R, R\right[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est solution de (E_λ).

1. Déterminer le DSE(0) de l'application

$$x \in]-R, R[\ \mapsto \ xf''(x) + 2f'(x) + \lambda x f(x)\,.$$

Quelles relations doivent satisfaire les coefficients a_n pour que f soit solution de (E_λ) ?

2. En déduire l'expression des coefficients a_{2m} et a_{2m+1}, $m \in \mathbb{N}$.

3. Préciser le rayon de convergence des séries obtenues et calculer leur somme (distinguer les cas $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$).

Exercice 10

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \qquad (x^2+1)y'' - 2y = 0$$

dont on suppose qu'elle admet des solutions développables en série entière en 0.

1. Déterminer les relations que doivent satisfaire les coefficients de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ pour que sa somme f soit solution de (E).

2. En déduire l'expression des coefficients a_n et préciser le rayon de convergence R des séries entières obtenues.

3. Calculer la somme φ de la série solution telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$.
Pour ce faire, on rappelle que

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad \arctan x \ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Exercice 11 On se propose de résoudre la relation de récurrence

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\,, \quad n \geqslant 2\,,$$

avec les conditions initiales $a_0 = a_1 = 1$. On associe à la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi définie la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ dont la somme est notée f.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in [1,\, 2^{n+1}-1]$. Que peut-on en déduire quant au rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$?
2. Montrer : $\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\,, \quad f(x) = \dfrac{2+x+x^2}{(2+x)(1+x)(1-2x)}$.
3. Déterminer le DSE(0) de f et préciser son rayon. En déduire l'expression de a_n.

Exercice 12 On s'intéresse à la relation de récurrence

$$2na_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\,, \quad n \geqslant 1\,,$$

avec la condition initiale $a_0 = 2$. On associe à la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi définie la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ dont la somme est notée f.

1. Montrer par récurrence que $a_n \in [0,\, 2/n!\,]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en conclure ?
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre (E).
3. Résoudre (E) et en déduire l'expression de a_n.

Travaux dirigés de mathématiques 2014–2015

Marc Robini

Département du 1^{er} cycle, filière ASINSA, $2^{\text{ème}}$ année

VII. Calcul différentiel

Exercice 1 *Continuité* (1/2)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \;=\; \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases} .$$

1. Vérifier que la restriction de f à n'importe quelle droite passant par $0_{\mathbb{R}^2}$ est continue en $0_{\mathbb{R}^2}$ (i.e. vérifier que les applications $t \mapsto f(0,t)$ et $t \mapsto f(t, \alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sont continues en $t = 0$).

2. Montrer que f est discontinue en $0_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 2 *Continuité* (2/2)

Étudier la continuité de l'application

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mapsto\; \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{(x^4+y^4)^{1/2}} & \text{si } (x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ \alpha & \text{si } (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases} , \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 *Différentiabilité* (1/4)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2-3y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases} .$$

1. a) Calculer les dérivées partielles premières $D_1 f$ et $D_2 f$ en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

b) Étudier l'existence de $D_1 f$ et $D_2 f$ au point $0_{\mathbb{R}^2}$.

c) Vérifier que f admet une dérivée en $0_{\mathbb{R}^2}$ suivant la direction de tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

2. Soit $\|\,.\,\|$ une norme sur $\mathbb{R}^2$ et soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(h) = f(h) - f(0_{\mathbb{R}^2}) - h_1 D_1 f(0_{\mathbb{R}^2}) - h_2 D_2 f(0_{\mathbb{R}^2})\,.$$

a) Vérifier que l'application $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varepsilon(h) = \varphi(h)/\|h\|$ si $h \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ et $\varepsilon(0_{\mathbb{R}^2}) = 0$ n'admet pas de limite en $0_{\mathbb{R}^2}$.

b) En déduire que f n'est pas différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$.

3. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Établir que f n'est pas différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$ en considérant les dérivées directionnelles $D_{e_1} f(0_{\mathbb{R}^2})$, $D_{e_2} f(0_{\mathbb{R}^2})$ et $D_{e_1+e_2} f(0_{\mathbb{R}^2})$.

Exercice 4 *Différentiabilité* (2/4)

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les applications définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{si } (x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

$$\text{et} \quad g(x,y) = \begin{cases} x\big(1 + x\sin(y/x)\big) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est différentiable en $0_{\mathbb{R}^2}$ et que g est différentiable en tout point $(0, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 *Différentiabilité* (3/4)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que l'application $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_2^2 \in \mathbb{R}_+$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et exprimer sa différentielle en un point quelconque de $\mathbb{R}^n$.
2. Étudier la différentiabilité de $\|\cdot\|_2$ et exprimer sa différentielle en tout point où elle est définie.

Exercice 6 *Différentiabilité* (4/4)

Déterminer les différentielles des applications suivantes aux points spécifiés.

a) $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ au point $x = \pi$.

b) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + x\cos y \in \mathbb{R}$ au point $(x,y) = (1,0)$.

c) $f : A \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto A^3 \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ au point $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $f : \varphi \in C([0,1], \mathbb{R}) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ au point $\varphi = 0$.

Exercice 7 *Matrices jacobiennes* (1/2)

1. On considère les applications différentiables
$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathrm{e}^y\cos x \in \mathbb{R}$$
$$\text{et} \quad g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\mathrm{e}^x\cos y, \mathrm{e}^y\cos x) \in \mathbb{R}^2.$$
Calculer la matrice jacobienne de $f \circ g$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Exprimer les matrices jacobiennes des applications suivantes en fonction des dérivées partielles premières de f.
   a) $h_1 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(y,x) \in \mathbb{R}$;
   b) $h_2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (f(y,x), f(x,y)) \in \mathbb{R}^2$;
   c) $h_3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f\big(f(y,x), f(x,y)\big) \in \mathbb{R}$.
3. Traiter la $1^{\text{ère}}$ question en utilisant le résultat de la question 2.c.

Exercice 8 *Matrices jacobiennes* (2/2)

Déterminer la matrice jacobienne de chacune des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous.

a) $f(x) = (v|x)$, où $(\,.\,|\,.\,)$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$ est fixé.

b) $f(x) = \exp\left(-\|x\|_2^2\right)$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

c) $f(x) = {}^{\mathrm{t}}XAX$, où $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne la matrice-colonne des composantes de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

d) $f(x) = \big(g(x)|h(x)\big)$, où g et h sont deux applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 9 *Une application différentiable n'est pas nécessairement de classe C^1...*

Montrer que l'application

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{si } (x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \end{cases}$$

n'est pas de classe C^1.

Exercice 10 *Laplacien en coordonnées polaires*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\forall (\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On pose $h = g \circ f$.

1. Vérifier que f est de classe C^2.

2. Exprimer les dérivées partielles premières de h en fonction de celles de g.

3. Exprimer les dérivées partielles secondes de h en fonction des dérivées partielles premières et secondes de g.

4. En déduire : $\forall (\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$D_{11}g(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) + D_{22}g(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = D_{11}h(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}D_{22}h(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho}D_1h(\rho,\theta).$$

Exercice 11 *Utilisation des théorèmes d'inversion*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1, bijective, dont la dérivée est strictement positive. On s'intéresse à l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(x,y) = \big(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\operatorname{sh} y}, f(x) + f(y)\big).$$

1. Vérifier que ϕ définit un C^1-difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f^{-1} est de classe C^1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)$.

3. Soit $v \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $g_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_v(x) = \mathrm{e}^x - \exp\big(\operatorname{sh}\big(f^{-1}(v - f(x))\big)\big)$$

est un C^1-difféomorphisme.

4. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme.

Exercice 12 *Équations aux dérivées partielles du 1^er ordre*

Résoudre les EDP1 suivantes, d'inconnue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, à l'aide du changement de variables fourni.

1. $aD_1 f(x,y) - D_2 f(x,y) = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*$ est donné, $(u,v) = (x, x+ay)$.

2. $D_1 f(x,y) - D_2 f(x,y) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\mathrm{sh} y}\,\mathrm{ch} y$, $(u,v) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\mathrm{sh} y},\, x+y)$.

Exercice 13 *Équation aux dérivées partielles du 2^ème ordre*

On considère l'EDP2

$$\text{(E)} \qquad 2x^2 D_{11} f - 5xy D_{12} f + 2y^2 D_{22} f + 2x D_1 f + 2y D_2 f = x^6 y^6$$

dont l'inconnue $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

1. Vérifier que l'application $\phi : (x,y) \in U \mapsto (x^2 y, xy^2) \in U$ définit un changement de variables.

2. Établir que f est solution de (E) si et seulement si l'application $g : U \to \mathbb{R}$ définie par $f = g \circ \phi$ est solution d'une EDP (E′) que l'on explicitera.

3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 14 *Formule de Taylor*

On considère l'application $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mapsto x^y \ln(z)$.

1. Déterminer le polynôme de Taylor à l'ordre 2 de f au point $a = (\mathrm{e}^2, 0, 1)$
(en d'autres termes, déterminer l'application $P_{2,f,a} : h \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(a) + \mathrm{d}_a f(h) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}_a^2 f(h,h)$).

2. En déduire une valeur approchée de $\mathrm{e}^{-0.04} \ln(1.03)$.

Exercice 15 *Extrema* (1/3)

Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; \|(x,y)\|_\infty \leqslant 2\big\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (x,y) \in D, \quad f(x,y) = xy - y^2.$$

1. Déterminer les extrema relatifs de f appartenant à l'intérieur $\overset{\circ}{D}$ de D.

2. a) Vérifier qu'aucun des points de $]-2,2[\,\times\{-2\}$ ne réalise un extremum de f.

b) Montrer que f admet un extremum en un point de $\{-2\}\times\,]-2,2[$.

c) Montrer que f admet un extremum en $(-2,2)$.
Qu'en est-il en $(-2,-2)$?

d) Préciser l'ensemble des extrema de f appartenant à $D \setminus \overset{\circ}{D}$.

Exercice 16 *Extrema* (2/3)

Déterminer les extrema relatifs des applications suivantes.

a) $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2/2 + xyz + y - z$.

b) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin^2 x - \mathrm{sh}^2 y$.

c) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$.

d) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y-x)^2(1 - x^2 - y^2)$.

Exercice 17 *Extrema (3/3) : moindres carrés*

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\big(\exists\, k, l \in \{1, \ldots, n\}\big)\big[x_k \neq x_l\big]$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 < n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

(utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

2. Dans le plan affine muni de son repère canonique, on donne n points $M_k = (x_k, y_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, tels que les x_k soient deux à deux distincts. On recherche une droite d'équation $y = ax + b$ qui soit la plus proche possible des points M_k en termes de minimisation de l'application

$$f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2.$$

a) Montrer que f admet un unique extremum relatif dont on précisera la nature et les coordonnées (on posera $S_x = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $S_y = \sum_{k=1}^{n} y_k$, $S_{xx} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et $S_{xy} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$).

b) Montrer qu'il s'agit d'un extremum global strict (utiliser la formule de Taylor à l'ordre 2).

Travaux dirigés de mathématiques 2014–2015

Marc Robini

Département du 1er cycle, filière ASINSA, 2ème année

VIII. Séries de Fourier

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1. f est-elle de classe C^1 par morceaux ?

2. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

3. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement. Quelle est sa somme ?

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application paire, 2π-périodique, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos\big(\sqrt{2}x\big)$.

1. Dessiner l'allure du graphe de f.

2. Développer f en série de Fourier.

3. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 2}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 1-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\end{cases} .$$

1. Développer f en série de Fourier.

2. Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de f ?

3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

Exercice 4

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique et continue par morceaux. On note $\tau_a f$ la translatée $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x - a)$.

a) Exprimer les coefficients de Fourier complexes de $\tau_a f + b$ en fonction de ceux de f.

b) En déduire les coefficients de Fourier réels de $\tau_a f + b$ en fonction de ceux de f.

2. Soient $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les applications 2π-périodiques définies par $\phi(x) = -|x|$ si $x \in [-\pi, \pi[$ et

$$\psi(x) = \begin{cases} \pi + x - a & \text{si } x \in [a - \pi, a[\\ \pi - x + a & \text{si } x \in [a, a + \pi[\end{cases} , \qquad a \in \mathbb{R} .$$

a) Développer ϕ en série de Fourier.

b) En déduire le développement en série de Fourier de ψ.

c) Que peut-on dire de la convergence des séries de Fourier de ϕ et de ψ ?

3. a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Exprimer les coefficients de Fourier réels de la dérivée de f en fonction de ceux de f.

b) En déduire le développement en série de Fourier de $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par

$$\theta(x) \;=\; \begin{cases} x(\pi+x)/2 & \text{si } x \in [-\pi, 0[\\ x(\pi-x)/2 & \text{si } x \in [0, \pi[\end{cases} .$$

Exercice 5

1. Étudier la convergence de la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} \big(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\big)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{3}\big(2-\sqrt{3}\,\big)^n \cos(nx)\,.$$

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \;=\; \frac{1+\cos x}{2(2-\cos x)}\,.$$

a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \;=\; g(x) + \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

b) En déduire les coefficients de Fourier de g. (On admet le résultat suivant : si une série trigonométrique $\sum_n a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ converge uniformément vers une application ϕ, alors ses coefficients a_n et b_n, $n \in \mathbb{N}$, sont les coefficients de Fourier réels de ϕ.)

3. On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y'' + y/4 = g\,.$$

a) On cherche à déterminer une série trigonométrique deux fois dérivable terme à terme dont la somme S est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On procède en deux temps.

(i) Supposer qu'une telle série existe et préciser ses coefficients.

(ii) Vérifier que la série ainsi obtenue est bien deux fois dérivable terme à terme.

b) Exprimer, en fonction de S, la forme générale des solutions de (E) vérifiant $y'(0) = 0$.

Exercice 6

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \mathrm{sh}(ax)$.

a) Développer f en série de Fourier.

b) Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de f ?

c) On note σ la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \big(g_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\big)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(a) = \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2 + a^2}\,.$$

(i) À l'aide du développement en série de Fourier de f, montrer :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sigma(a) = \frac{\pi}{4\,\mathrm{ch}(a\pi/2)}\,.$$

(ii) Vérifier que $\sum_n g_n$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[0,\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire $\sigma(0)$.

2. On se propose de montrer :

$$(\star) \qquad \forall a \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\pi}{2\operatorname{ch}(a\pi/2)}\,.$$

Pour ce faire, on associe à tout élément a de $\mathbb{R}_+$ la série $\sum_{n\geqslant 0}\big(h_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\big)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h_n(x) = 2(-1)^n \mathrm{e}^{-(2n+1)x}\cos(ax)\,.$$

a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x) = \frac{\cos(ax)}{\operatorname{ch} x}$.

c) Calculer le $n^{\text{ème}}$ reste, R_n, de $\sum_{n\geqslant 0} h_n$.

d) Montrer : $\displaystyle\lim_{n\infty}\left|\int_0^{+\infty} R_n(x)\,\mathrm{d}x\right| = 0$. En déduire :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^{+\infty}\frac{\cos(ax)}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

e) Établir $(\star)$.

Travaux dirigés de mathématiques 2014–2015

Marc Robini
Département du 1er cycle, filière ASINSA, 2ème année

IX. Courbes et surfaces

Exercice 1 *Courbe paramétrée de* $\mathbb{R}^3$ (fig. 1)

On considère l'arc paramétré

$$f : t \in \,]-\pi/2, \pi/2[\, \longmapsto \big(\cos^2 t,\ \cos t \sin t,\ \sqrt{3}\cos t\big) \in \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

et on note $\Gamma = f(]-\pi/2, \pi/2[)$ la courbe associée.

1. a) Montrer que Γ est la réunion de deux courbes admettant chacune une représentation cartésienne de la forme $(x, y) = \varphi(z)$.

b) Expliquer pourquoi ce type de représentation cartésienne ne permet pas de décrire localement Γ au voisinage du point $(1, 0, \sqrt{3})$.

2. a) Vérifier que la famille $\{f'(t), f''(t)\}$ est libre quel que soit $t \in \,]-\pi/2, \pi/2[$.
(Autrement dit, Γ est *birégulière*.)

b) Donner l'équation du plan osculateur à Γ en $M_0 = f(t_0)$.

3. a) Quelle est la projection de Γ sur le plan d'équation $z = 0$? En déduire que Γ appartient à un cylindre de révolution.

b) Vérifier que Γ appartient également à un demi-cône de révolution d'axe Oz.
(Rappel : un cône de révolution d'axe Oz a pour représentation implicite $x^2 + y^2 = r^2(z - \alpha)^2$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.)

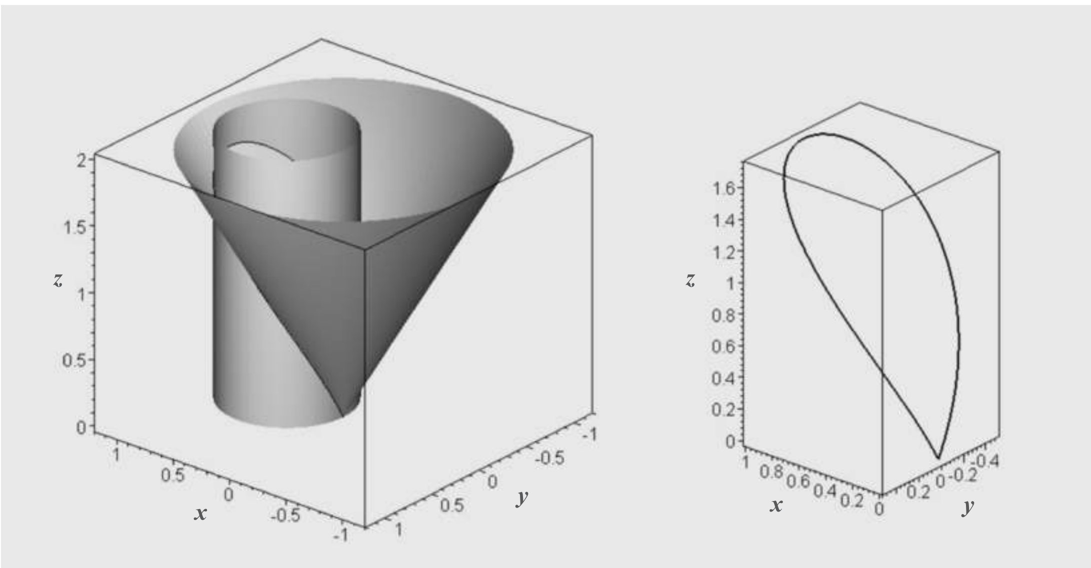


Figure 1. — Courbe de l'espace de paramétrage admissible (1).

Exercice 2 *Surface cartésienne* (fig. 2)

Soit S la quadrique d'équation $x^2 - \alpha\, y^2 - z = 0$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $A(x_0, y_0, z_0) \in S$. On note Π le plan tangent à S en A.

1. Donner une équation de Π.

2. Quelle est la position de S par rapport à Π au voisinage de A ?

3. Déterminer $S \cap \Pi$ dans le repère $(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, où $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

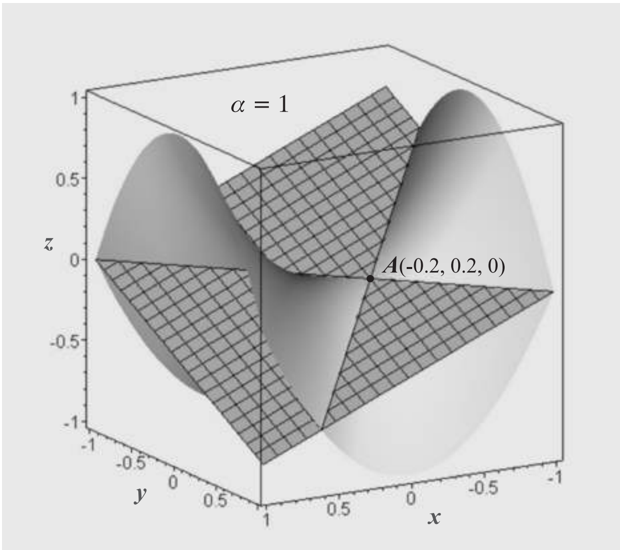


Figure 2. — Quadrique d'équation $x^2 - y^2 - z = 0$ et plan tangent en $A(-0.2, 0.2, 0)$.

Exercice 3 *Nappe paramétrée* (1/3 — fig. 3)

On considère la nappe paramétrée

$$\varphi : (s,t) \in \Omega \longmapsto \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\big(1+t^2\big)^{1/2},\ \frac{2s}{1+s^2}\big(1+t^2\big)^{1/2},\ t \right) \in \mathbb{R}^3, \tag{2}$$

où $\Omega = \,]-1, 1[\, \times \mathbb{R}$. On note $S = \varphi(\Omega)$ la surface associée.

1. Soit $\psi : \Delta \to \mathbb{R}^3$ la nappe paramétrée définie par $\Delta = \,]-\pi/2, \pi/2[\, \times \mathbb{R}$ et

$$\psi(u,v) = \big(\cos u \operatorname{ch} v,\ \sin u \operatorname{ch} v,\ \operatorname{sh} v\big).$$

Montrer que les paramétrages (Ω, φ) et (Δ, ψ) sont $\mathcal{O}$-équivalents.
$\big($Rappel : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\cos 2a = (1 - \tan^2 a)/(1 + \tan^2 a)$ et $\sin 2a = 2\tan a/(1 + \tan^2 a)$.$\big)$

2. Vérifier que ψ est régulière.

3. Donner une équation du plan tangent à S au point A de coordonnées $\psi(\pi/4, 0)$.

4. a) Montrer que les points $(x,y,z) \in S$ vérifient une équation de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$, où α, β, γ et δ sont des constantes réelles que l'on précisera.

b) Décrire les lignes coordonnées obtenues en figeant le paramètre v.

5. a) Donner une représentation cartésienne de S du type $x = f(y,z)$.

b) Préciser la position de S par rapport à son plan tangent Π au point A.

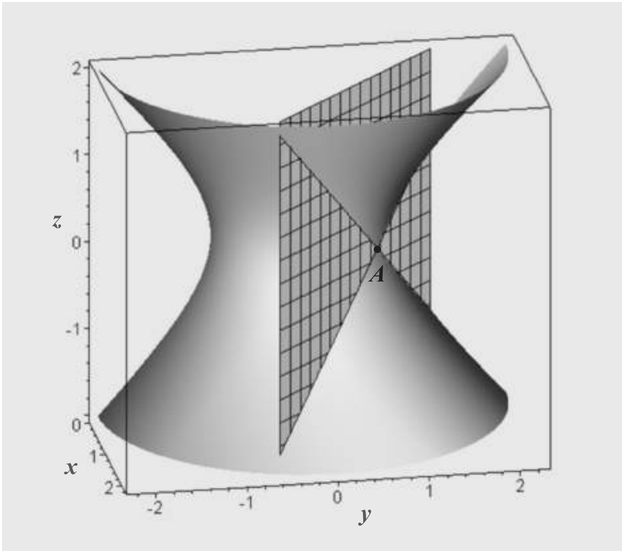


Figure 3. — Surface de paramétrage admissible (2) et plan tangent en $A\big(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\big)$.

Exercice 4 *Nappe paramétrée* (2/3)

On considère la nappe paramétrée

$$\varphi : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \big(v,\ v\cos u,\ (2-v)\sin u\big) \in \mathbb{R}^3$$

et on note $S = \varphi(\mathbb{R}^2)$ la surface associée.

1. a) Décrire les lignes coordonnées Γ_v obtenues en figeant v. Préciser Γ_0, Γ_1 et Γ_2.

b) Décrire les lignes coordonnées Δ_u obtenues en figeant u. Vérifier qu'elles coupent l'axe Oz et la droite D d'équations $\{\, x = 2,\ z = 0 \,\}$.

2. On note Σ la surface S privée de l'axe Oz et de D.

a) Montrer que Σ est régulière.

b) Déterminer les lignes coordonnées Δ_u le long desquelles la direction vectorielle du plan tangent à Σ demeure constante.

Exercice 5 *Nappe paramétrée* (3/3)

On considère la surface S constituée de l'ensemble des points de coordonnées (x,y,z) vérifiant

$$\exists (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\, u + v \\ y = a\,\mathrm{sh}\, u + v \\ z = a + 2v\,\mathrm{e}^{-u} \end{cases},$$

où a est un réel strictement positif fixé.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(u,v) = \big(a\,\mathrm{ch}\, u + v,\ a\,\mathrm{sh}\, u + v\big).$$

a) Montrer f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$ sans chercher à calculer f^{-1}.

b) Calculer $x+y$ et $x-y$ pour $(x,y) = f(u,v)$. En déduire l'expression de f^{-1}.

c) Exprimer z en fonction de (x,y) pour $(x,y,z) \in S$. En déduire que S est incluse dans une quadrique Σ d'équation $\alpha x^2 + \beta z^2 + \gamma z = 0$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. A t-on $S = \Sigma$?

2. a) Décrire les lignes coordonnées C_u obtenues en figeant u.

b) Soit Γ_v une ligne coordonnée obtenue en figeant v. Montrer que la projection orthogonale de Γ_v sur le plan Oxy est incluse dans une conique dont on précisera la nature.

c) Montrer que Γ_v est contenue dans un plan.
(On admet le résultat suivant : la courbe Γ définie par l'arc paramétré $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ est *plane* si elle est birégulière — c'est-à-dire si la famille $\{\varphi'(u), \varphi''(u)\}$ est libre quel que soit $u \in I$ — et si la direction vectorielle de son plan osculateur est constante.)

Exercice 6 *Courbe implicite* (1/2)

On considère la courbe implicite Γ d'équation $\sin(x+y) = xy + 2x$.

1. Montrer que Γ peut être décrite comme le graphe d'une fonction $x \mapsto \varphi(x)$ au voisinage de $0_{\mathbb{R}^2}$.

2. Former le développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 0.

Exercice 7 *Courbe implicite* (2/2)

Soit Γ la courbe implicite d'équation $y^2 + 2x^2y - 3x^4 = 0$.

1. a) Le théorème des fonctions implicites permet-il de décrire Γ comme le graphe d'une fonction $x \mapsto \varphi(x)$ ou $y \mapsto \psi(y)$ au voisinage de $0_{\mathbb{R}^2}$?

b) Qu'en est-il au voisinage du point (3,9) ?

2. Déterminer l'équation de la droite tangente à Γ au point $(3, 9)$.

3. Vérifier que Γ est la réunion de deux paraboles d'axe de symétrie Oy. Représenter Γ.

Exercice 8 *Surface implicite*

On considère la surface implicite S d'équation $x^4 + 2y^3 - z^5 + xz - \cos y = 0$.

1. Montrer que S admet localement des représentations cartésiennes du type $z = \varphi(x, y)$ et $x = \psi(y, z)$ au voisinage du point $A(1, 0, 1)$.

2. a) Exprimer la différentielle de φ au point $(1, 0)$ et la différentielle de ψ au point $(0, 1)$.

b) Donner l'équation du plan tangent à S au point A.

3. Calculer les dérivées partielles secondes de φ au point $(1, 0)$.

4. a) Expliciter le polynôme de Taylor à l'ordre 2 de φ au point $(1, 0)$.

b) Quelle est la position de S par rapport à son plan tangent en A ?

Exercice 9 *Théorème des fonctions implicites : cas général*

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y, z, t) = \left(x^2 - y^2 + zt,\ xy + z^2 - t^2\right).$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de $(0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage W de $(1, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une application $\varphi : V \to W$ de classe C^∞ tels que

$$\varphi(0, 1) = (1, 1) \qquad \text{et} \qquad \forall (x, y) \in V,\ \ f\big(x, y, \varphi(x, y)\big) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

2. Exprimer la matrice jacobienne de φ au voisinage de $(0, 1)$.

Exercice 10 *Théorème des fonctions implicites et système d'équations*

On s'intéresse au système d'équations

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} x^3+y^3+z^3+t^2=0 \\ x^2+y^2+z^2+t=2 \\ x+y+z+t=0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que l'on peut résoudre (S) en fonction de la variable t au voisinage du point $(0,-1,1,0)$. (En d'autres termes, montrer qu'il existe une application φ définie sur un voisinage V de 0 telle que, pour tout $t\in V$, $(x,y,z)=\varphi(t) \iff (x,y,z,t)$ est solution de (S).)

2. Calculer la dérivée en 0 de l'application $\varphi : t\mapsto \big(x(t),y(t),z(t)\big)$ ainsi définie.

Exercice 11 *Fenêtre de Viviani* (fig. 4)

On considère la courbe Γ de $\mathbb{R}^3$ définie implicitement par le système d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y^2+z^2-z=0 \end{cases}. \tag{3}$$

1. a) Montrer que Γ admet localement une représentation cartésienne du type $(y,z)=\varphi(x)$ au voisinage de tout point $(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$ tel que $y_0\neq 0$.

b) Peut-on représenter Γ localement au voisinage des points $(1,0,0)$ et $(-1,0,0)$ en exprimant deux des coordonnées en fonction de la coordonnée restante ?

2. Déterminer la direction de la tangente à Γ en un point $(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$ tel que $y_0\neq 0$.

3. Établir que $\Gamma=f([0,2\pi])$ avec $f:t\in[0,2\pi]\mapsto\big(\sin t,\,\sin t\cos t,\,\cos^2 t\big)\in\mathbb{R}^3$.

4. Pour tout $t\in[0,2\pi]$, on note $\widetilde{f}(t)=(\widetilde{x}(t),\widetilde{y}(t),\widetilde{z}(t))$ la projection orthogonale de $f(t)=(x(t),y(t),z(t))$ sur le plan Π d'équation $y=x$.

a) Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à Π. Il existe donc un réel λ tel que $\overrightarrow{f(t)\widetilde{f}(t)}=\lambda\overrightarrow{n}$. En déduire une représentation paramétrique de la projection de Γ sur Π.

c) Donner la représentation de cette projection dans la base $\big(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\,\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0),\,(0,0,1)\big)$.

Exercice 12 *Courbe implicite de $\mathbb{R}^3$* (fig. 5)

Soient S_1 et S_2 les surfaces implicites d'équations respectives

$$x^3+y^3+z^3-x^2-y^2-z^2\;=\;0 \qquad \text{et} \qquad x^2y+y^2z+z^2x\;=\;1. \tag{4}$$

On considère le point $A(0,1,1)\in S_1\cap S_2$ et on note Π_i $(i=1,2)$ le plan tangent à S_i en A.

1. Former une équation de Π_1 puis préciser la position de S_1 par rapport à Π_1 au voisinage de A.

2. On pose $\Gamma=S_1\cap S_2$.

a) Montrer que la courbe Γ admet localement une représentation cartésienne du type $(y,z)=\varphi(x)$ au voisinage de A.

b) Déterminer la direction de la tangente à Γ en A.

3. Former une équation de Π_2 puis vérifier que la tangente en A à Γ est $\Pi_1\cap\Pi_2$.

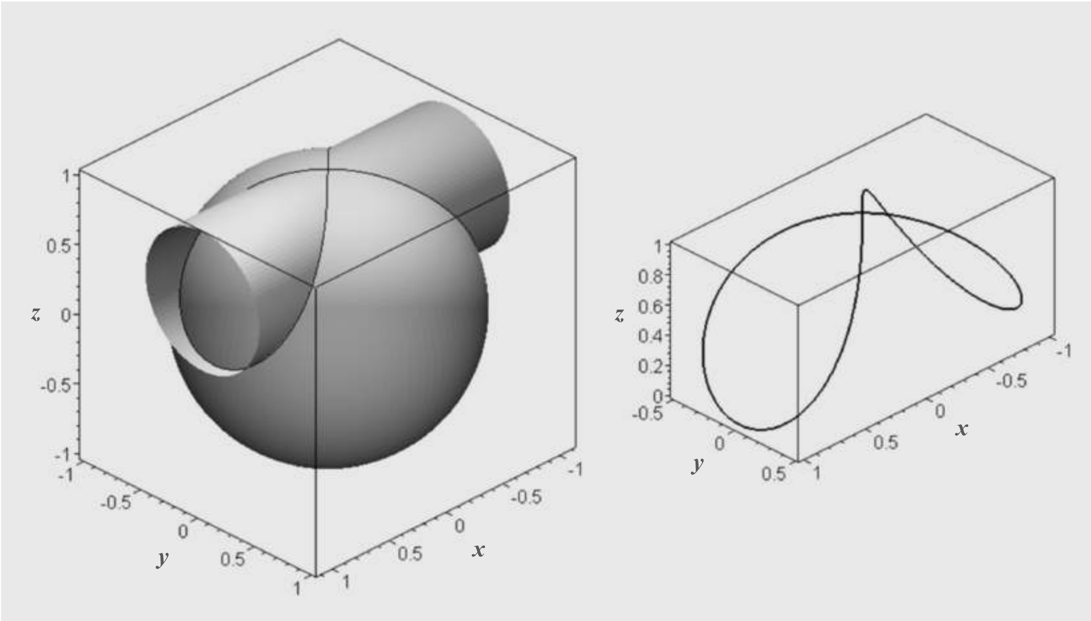


Figure 4. — Courbe de l'espace définie par le système (3).

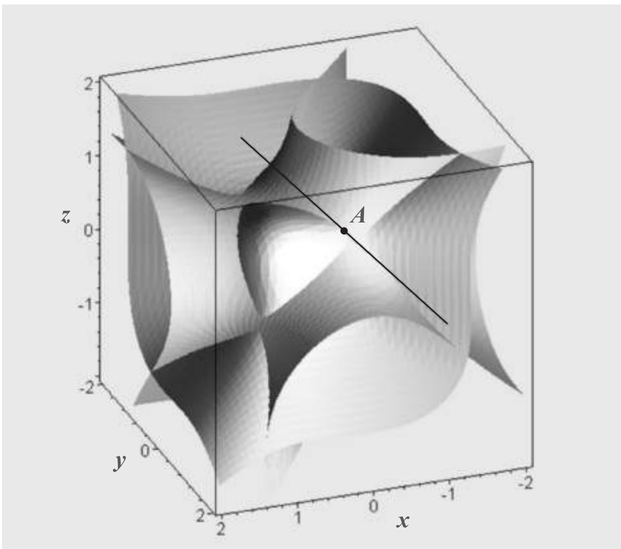


Figure 5. — Surfaces définies en (4) et droite d'intersection des plans tangents en $A(0, 1, 1)$.

Travaux dirigés de mathématiques 2014–2015

Marc Robini
Département du 1er cycle, filière ASINSA, 2ème année

X. Intégration

Exercice 1 *Champ de gradient*

On considère le champ de vecteurs $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) \;=\; (3x_1^2 + 3x_2 - 1,\ x_3^2 + 3x_1,\ 2x_2x_3 + 1).$$

1. Calculer la circulation de α le long de la courbe Γ paramétrée par

$$\varphi : t \in [0,1] \longmapsto (\mathrm{e}^t, t, t^2) \in \mathbb{R}^3.$$

2. Vérifier que la 1-forme $\omega \;=\; \alpha_1 \mathrm{d}x_1 + \alpha_2 \mathrm{d}x_2 + \alpha_3 \mathrm{d}x_3$ associée à α est fermée.

3. En déduire que ω est exacte.

4. Déterminer les *potentiels* de α, c'est-à-dire les applications $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telles que $\alpha = \nabla f$.

5. Retrouver le résultat de la $1^{\text{ère}}$ question sans calculer d'intégrale.

Exercice 2 *Changement de variable*

Soit $D = \big\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \,\big|\, x^3 + y^3 < 1\big\}$. On cherche à calculer

$$\mathcal{I}(a) \;=\; \int_D x^2y^2\big(1 + x^3 + y^3\big)^a \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad a \in \mathbb{R}_+.$$

1. Montrer que D est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit φ l'application de D sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x,y) = (u,v)$ avec $u = x^3$ et $v = y^3$.

a) Déterminer le jacobien de φ en tout point de D.

b) Vérifier que φ est injective.

c) Représenter $\varphi(D)$.

3. En déduire la valeur de $\mathcal{I}(a)$.

Exercice 3 *Volume d'un solide de révolution — théorème de Guldin*

1. Soit D un domaine ouvert du demi-plan $\{(0,y,z)\,;\, y \in \mathbb{R}_+,\ z \in \mathbb{R}\}$ et soit V le domaine de l'espace obtenu en faisant tourner D autour de l'axe Oz.

a) Déterminer l'image réciproque de V par le changement en coordonnées cylindriques.

b) On note respectivement $\mathcal{A}(D)$ et y_{G} l'aire de D et l'ordonnée du centre de gravité de D :

$$\mathcal{A}(D) \;=\; \int_D \mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \text{et} \qquad y_{\mathrm{G}} \;=\; \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \int_D y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Montrer que le volume de V vaut $2\pi\, y_{\mathrm{G}}\, \mathcal{A}(D)$.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ avec $c > a$. Calculer le volume du tore couvert par la rotation autour de Oz du domaine $D = \big\{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (y-c)^2/a^2 + z^2/b^2 < 1\big\}$.
[*Indication* : proposer un changement de variable $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $\theta^{-1}(D) = B(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$.]

Exercice 4 *Formule de Stokes*

1. Soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ deux champs vectoriels de classe C^1 définis sur un même ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et soient $\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{d}x_i$ et $\omega' = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathrm{d}x_i$ les 1-formes associées.

a) Rappeler la définition de la 2-forme $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$.

b) Le *produit extérieur* des 1-formes ω et ω' est défini par

$$\omega \wedge \omega' = \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \alpha_i \beta_j (\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j).$$

Vérifier que l'application $(\omega, \omega') \in (\Lambda^2(U))^2 \longmapsto \omega \wedge \omega'$ est bilinéaire et anti-symétrique.

c) Montrer que la 2-forme $\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}\alpha_i \wedge \mathrm{d}x_i$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (D_j \alpha_i - D_i \alpha_j)(\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i).$$

d) Dans le cas $n = 3$, exprimer $\mathrm{d}\omega$ en fonction du rotationnel de α et du vecteur

$$\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3,\, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1,\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2).$$

2. On considère la 1-forme $\omega = x_1 x_3 \,\mathrm{d}x_1 - x_3^3 \,\mathrm{d}x_2 + x_2^3 \,\mathrm{d}x_3$ définie sur $\mathbb{R}^3$.

a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la circulation de ω le long de la courbe Γ paramétrée par

$$\varphi : u \in [0, 2\pi] \longmapsto (0,\, a \cos u,\, a \sin u) \in \mathbb{R}^3.$$

b) Soit S la demi-sphère définie par

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \iff \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Calculer le flux de $\mathrm{d}\omega$ *sortant* de S, c'est-à-dire le flux dirigé vers l'extérieur de la sphère.

c) Expliquer pourquoi ce dernier résultat était prévisible.

Exercice 5 *Calcul d'aire via la formule de Green-Riemann*

1. Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ délimité par une courbe simple Γ de classe C^1. On note $\mathcal{A}(D)$ l'aire de D.

a) Rappeler la formule de Green-Riemann.

b) Montrer que $\mathcal{A}(D) = \displaystyle\int_\Gamma x_1 \mathrm{d}x_2$.

c) Vérifier que la 1-forme $\omega = x_2 \mathrm{d}x_1 + x_1 \mathrm{d}x_2$ est exacte. En déduire que $\displaystyle\int_\Gamma x_2 \mathrm{d}x_1 + x_1 \mathrm{d}x_2 = 0$.

d) Montrer que $\mathcal{A}(D) = -\displaystyle\int_\Gamma x_2 \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2} \int_\Gamma x_1 \,\mathrm{d}x_2 - x_2 \,\mathrm{d}x_1$.

e) Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ un paramétrage de Γ positivement orienté (I est un intervalle de $\mathbb{R}$). Montrer que

$$\mathcal{A}(D) = \int_I \varphi_1(t) \varphi_2'(t) \,\mathrm{d}t = -\int_I \varphi_2(t) \varphi_1'(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_I \det(\varphi(t), \varphi'(t)) \,\mathrm{d}t.$$

2. On admet que le résultat précédent s'étend au cas où Γ est C^1 par morceaux. Calculer l'aire du domaine de $\mathbb{R}^2$ compris entre l'axe des abscisses et l'arche de cycloïde de paramétrage

$$\psi : t \in [0, 2\pi] \longmapsto (t - \sin t,\, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 6 *Longueur et aire dans le plan*

1. Dessiner la courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ paramétrée par

$$\varphi : t \in [0,1] \longmapsto \big(t(1-t),\, t^2/2\big) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Calculer la longueur de Γ.
[*Indication* : utiliser le changement de variable $u = \operatorname{argsh}(5t-2)$.]

3. Calculer l'aire du domaine délimité par Γ et par l'axe des ordonnées.

Exercice 7 *Longueur, aire et volume dans l'espace*

1. Dessiner la courbe Γ de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$\varphi : t \in [0, \pi/2] \mapsto (\cos t,\, \sin t, t) \in \mathbb{R}^3.$$

2. Calculer la longueur de Γ.

3. Représenter schématiquement la surface S constituée par l'ensemble des droites perpendiculaires à l'axe Oz et intersectant Oz et Γ.

4. Déterminer l'aire de la partie de S délimitée par les plans Oxz et Oyz et par le cylindre de révolution Σ d'axe Oz et de rayon 1.

5. Calculer le volume du domaine $V \subset (\mathbb{R}_+^*)^3$ délimité par S et par Σ.
[*Indication* : considérer le système de coordonnées cylindriques.]

Exercice 8 *Integrales doubles et formule de Green-Riemann*

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2/8 < y < x^2,\ y^2/8 < x < y^2\}$. On cherche à calculer

$$\mathcal{I} = \int_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

1. Représenter D graphiquement.

2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(u,v) = (uv^2, vu^2)$.

a) Déterminer l'image réciproque Δ de D par φ puis montrer que $\varphi|_\Delta$ est un C^1-difféomorphisme de Δ sur D.

b) Calculer $\mathcal{I}$ à l'aide du changement de variable défini par φ.

3. Calculer $\mathcal{I}$ en utilisant la formule de Green-Riemann.

Exercice 9 *Formule d'Ostrogradski*

1. Rappeler la formule d'Ostrogradski.

2. a) Expliquer comment utiliser cette formule pour calculer des volumes.

b) Appliquer cette méthode au calcul du volume d'une sphère de rayon $a \in \mathbb{R}_+^*$.

3. Soient α et S le champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ et le morceau de cylindre respectivement définis par

$$\alpha(x,y,z) = \big(xy^2z(z-1),\, x^2yz(z-1),\, z^3-z^2\big) \qquad \text{et} \qquad (x,y,z) \in S \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z \in [0,1]. \end{cases}$$

a) Calculer le flux de α sortant de S en évaluant directement l'intégrale de surface associée.

b) Retrouver le résultat obtenu en utilisant la formule d'Ostrogradski.