

Gabarits déformables élastiques pour la segmentation et le suivi de mouvement du
cœur en IRM

Fabrice VINCENT

juin 2001

Table des matières

1	Contexte	9
1.1	Introduction	9
1.2	Le coeur et l'ischémie myocardique	9
1.2.1	Complexité morphologique et fonctionnelle du coeur	9
1.2.2	L'ischémie myocardique	11
1.3	Évaluation de la fonction contractile en imagerie du coeur	12
1.3.1	Modalités d'imagerie pour l'étude de la contraction du coeur	13
1.3.2	Techniques d'estimation quantitative du mouvement du coeur : une revue	17
1.4	Conclusion - Choix de recherche	20
2	Les gabarits déformables	23
2.1	Introduction : du modèle déformable au gabarit déformable	23
2.2	Principaux gabarits déformables	24
2.2.1	Modèle de forme active	24
2.2.2	Gabarit déformable de Rüeckert	26
2.2.3	La pyramide déformable de Reissman et Lötjönen	27
2.2.4	L'atlas déformable de Bacjsy	29
2.3	Synthèse sur les gabarits déformables	30
2.3.1	Principe de déformation	30
2.3.2	Énergie interne d'un gabarit	33
2.3.3	Gabarits mixtes	34
2.4	Conclusion	35
3	Élasticité et Méthode des Éléments Finis (MEF)	37
3.1	Principes de l'élasticité	37
3.1.1	Grandeurs fondamentales en élasticité	37
3.1.2	Équations locales	40
3.1.3	Principe du minimum de l'énergie potentielle	42
3.1.4	Notation vectorielle des déformations et contraintes	43
3.2	Résolution du problème d'élasticité par la méthode des éléments finis (MEF)	44

3.2.1	Méthode de Ritz	44
3.2.2	Choix des fonctions de base	45
3.2.3	Méthode des Éléments finis	46
3.3	Analyse Modale	51
3.4	Utilisation de la théorie de l'élasticité en traitement d'images	53
3.4.1	Régularisation par élasticité	53
3.4.2	Modes élastiques	53
3.4.3	Modèle biomécanique de l'organe imagé	54
3.4.4	Élasticité et imagerie cardiaque	54
4	Gabarit élastique	57
4.1	Principes du gabarit élastique (GE)	57
4.1.1	Modèle géométrique	58
4.1.2	Fonctionnelle d'énergie	58
4.1.3	Minimisation de la fonctionnelle d'énergie	59
4.1.4	Réduction modale	60
4.1.5	Condensation de la matrice de raideur	61
4.1.6	Ajout de modes particuliers	62
4.2	Régularisation des interfaces du modèle	63
4.2.1	Définition d'une énergie interne de régularisation des interfaces	63
4.2.2	Discretisation de l'énergie interne de contour	66
4.3	Discussion	68
5	Résultats	71
5.1	Énergie Externe	71
5.2	Résultats de segmentation en 2D	72
5.3	Résultats en 3D	74
5.4	Discussion	84
6	Extension du modèle intégrant la texture	87
6.1	Suivi de contour par <i>snake</i>	87
6.2	Estimation d'un champ de déplacement avec régularisation élastique	88
6.2.1	Choix de l'énergie externe	89
6.2.2	Choix de l'énergie interne	89
6.3	Combinaison des deux techniques	90
6.4	Discretisation de l'énergie du modèle	90
6.5	Minimisation de l'énergie du modèle	93
6.6	Résultats	94
6.6.1	Expérimentation sur des images de synthèse	94
6.6.2	Application à l'IRM de marquage tissulaire	97
6.6.3	Conclusion	104

A	Approche bayésienne des modèles déformables	107
B	Bibliographie personnelle	109

Liste des abréviations

DFD	Displaced Frame Difference
FFD	Free Form Deformation, déformation de forme libre
IRM	Imagerie par Résonance Magnétique
MEF	Méthode des Éléments Finis
RM	Résonance Magnétique
VD	Ventricule Droit
VG	Ventricule Gauche

Chapitre 1

Contexte

1.1 Introduction

L'infarctus du myocarde est l'une des premières causes de mortalité dans les pays industrialisés. Il constitue le stade terminal de l'ischémie myocardique, pathologie dont l'origine est un défaut d'irrigation sanguine du muscle cardiaque (myocarde) dû à l'occlusion plus ou moins prononcée d'artères coronaires. Les techniques d'imagerie récentes ont permis des avancées importantes dans la compréhension des mécanismes de l'ischémie et ouvrent des voies nouvelles pour le diagnostic.

Différents aspects fonctionnels du coeur peuvent être étudiés en imagerie cardiaque, dans le but de détecter et de quantifier les régions ischémiques d'un myocarde malade. Dans le cadre de cette thèse nous nous sommes intéressés à la fonction contractile.

Dans ce chapitre, nous effectuons une brève description de l'anatomie et de la physiologie du coeur et nous précisons les mécanismes de l'ischémie myocardique. Nous nous focalisons ensuite sur la fonction contractile en présentant d'une part les diverses modalités d'imagerie qui permettent de la quantifier et d'autre part une revue bibliographique de l'étude de la fonction contractile à partir du traitement d'images. Ce chapitre s'inspire en grande partie de la thèse de Han [Han99].

1.2 Le coeur et l'ischémie myocardique

Notre objectif ici n'est pas de faire une description détaillée de la morphologie et de la fonction cardiaque. Nous nous contenterons d'insister sur quelques points clefs qui mettent en évidence sa complexité morphologique et fonctionnelle. Pour plus de précision, nous renvoyons le lecteur à des ouvrages classiques de physiologie cardiovasculaire [Hou90].

1.2.1 Complexité morphologique et fonctionnelle du coeur

D'un point de vue morphologique, le coeur est un muscle creux (myocarde) délimitant quatre cavités : les oreillettes droite (OD) et gauche (OG) et les ventricules droit (VD)

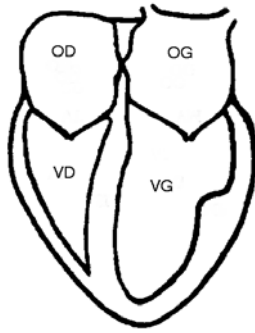


FIG. 1.1 – Le coeur et ses quatre cavités en coupe grand axe quatre cavités(OD = oreillette droit, OG = oreillette gauche, VD = ventricule droit, VG = ventricule gauche.

et gauche (VG) (Figure 1.1). Les cavités auriculaires et ventriculaires sont en communication par l'intermédiaire des valvules tricuspide (VT) et mitrale (VM) qui sont reliées par des cordages tendineux aux muscles papillaires situés sur les faces internes antérieures et postérieures des ventricules. Les ventricules droit et gauche sont séparés par le septum interventriculaire. La surface interne des cavités est appelée *endocarde*. La face externe du myocarde est appelée *épicarde*. En réalité, l'intérieur des cavités n'est pas lisse mais présente de nombreuses trabéculations. Le myocarde ventriculaire gauche, d'environ 8mm d'épaisseur, est constitué de fibres schématiquement organisées en trois couches d'orientation différente. Les deux couches périphériques s'enroulent en écharpe avec des orientations opposées l'une de l'autre. La couche centrale, prépondérante, est constituée de fibres orientées selon la direction circonférentielle. Le myocarde est irrigué par les vaisseaux coronaires. Les capillaires sont très nombreux en particulier dans les territoires sous-endocardiques du VG.

D'un point de vue fonctionnel, le coeur est constitué de quatre pompes, correspondant aux quatre cavités, insérées dans deux dispositifs : le coeur droit (OD, VD) et le coeur gauche (OG, VG) reliés en série par la circulation pulmonaire. Le VG a pour mission de propulser le sang dans l'ensemble de l'organisme et éjecte ainsi une moyenne de 25 litres par minute. C'est la raison pour laquelle la plupart des études portent sur le VG. Pour effectuer ce travail étonnant dans des conditions optimales, plusieurs co-facteurs sont déterminants. L'apport sanguin au muscle définit la *perfusion myocardique*. La consommation des substrats énergétiques dans les myocytes constitue le *métabolisme myocardique*. La *fonction contractile* du coeur traduit la capacité de déformation des fibres myocardiques. Elle est pilotée par la propagation d'une onde électrique de dépolarisation ou d'activation dans les tissus nodaux.

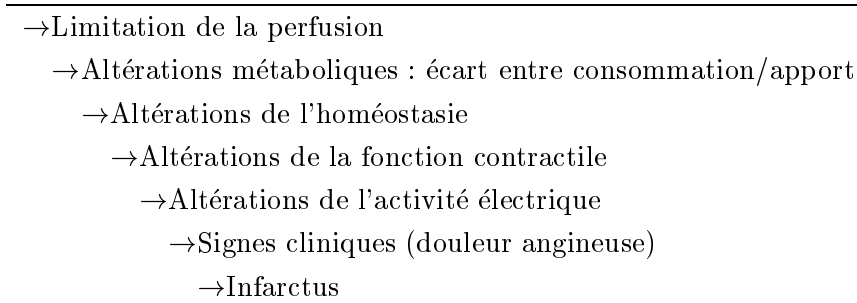


FIG. 1.2 – Cascade ischémique.

1.2.2 L'ischémie myocardique

Un équilibre entre perfusion, métabolisme et fonction contractile est établi en permanence pour le myocarde normal [Jan98]. Un défaut de l'apport sanguin au niveau du myocarde est appelé *ischémie myocardique*. Il entraîne un déséquilibre entre perfusion, métabolisme et fonction contractile et un enchaînement d'événements décrit par le terme de *cascade ischémique* (Figure 1.2) [Jan98].

Si l'ischémie se prolonge, les territoires concernés peuvent se nécroser. Dans les cas les plus graves, la cascade ischémique aboutit à l'infarctus du myocarde, première cause de mortalité dans les pays industrialisés. Les recherches sur l'ischémie myocardique ont débuté en 1935 avec les travaux de Tennant et Wiggers [TW35] qui sont les premiers à constater chez l'animal l'apparition d'anomalies de la contraction locale à l'occasion d'une occlusion coronaire.

En matière de diagnostic de l'ischémie myocardique, l'imagerie cardiaque s'est imposée comme un outil incontournable. Ainsi la perfusion est accessible grâce à l'imagerie par résonance magnétique (IRM), ou l'échographie ultrasonore (US) ; le métabolisme est étudié en tomographie par émission mono-photonique (TEMP) ou en tomographie par émission de positons (TEP) ; la fonction contractile peut être évaluée à partir de l'IRM ou de l'échographie, qui permettent d'accéder au mouvement du coeur.

Actuellement, la recherche actuelle en imagerie cardiaque vise d'abord à améliorer la quantification de chacun des paramètres déterminant le fonctionnement cardiaque et à étudier leur pertinence respective en terme de diagnostic de l'ischémie. De plus des travaux récents ont montré que la prise en compte simultanée de ces paramètres, appelée *fusion*, améliorerait la qualité de l'évaluation de l'ischémie myocardique [DZMR98].

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'extraction de l'anatomie cardiaque et à l'évaluation de la fonction contractile à partir d'images par RM

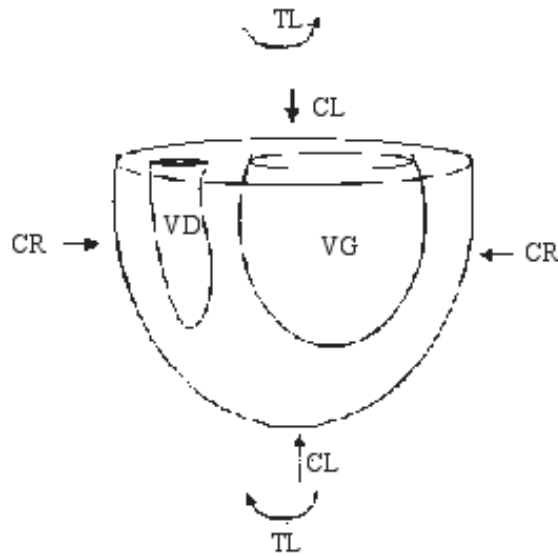


FIG. 1.3 – Représentation schématique des principaux mouvements du cœur (CR=Contraction Radiale, CL=Contraction Longitudinale, TL=Torsion Longitudinale)

1.3 Évaluation de la fonction contractile en imagerie du cœur

De façon très schématique et globale, le mouvement du ventricule gauche d'un cœur sain peut être décomposé en quatre mouvements principaux listés ci-après par ordre d'importance relative :

- Contraction radiale (CR),
- Contraction longitudinale (CL),
- Torsion autour du grand axe du VG (TL),
- Déformation du grand axe.

Ces mouvements sont représentés sur la figure 1.3. Il faut également ajouter une rotation et une translation rigides globales.

Ces mouvements ne sont pas uniformes sur l'ensemble du VG. Ainsi la rotation autour du grand axe change de sens de la base à l'apex. La contraction radiale n'a pas la même amplitude dans l'épaisseur de la paroi. Elle est plus grande au niveau endocardique qu'au niveau épicaudique.

Du fait de la grande complexité du mouvement cardiaque, la fonction contractile est difficile à caractériser. Divers paramètres permettent une quantification globale ou semi-locale de celle-ci. La *fraction d'éjection* mesure la variation de volume de la cavité ventriculaire au cours du cycle cardiaque. L'*épaississement pariétal* mesure la variation maximale d'épaisseur de la paroi myocardique dans une région donnée.

La fraction d'éjection est une mesure globale, qui permet de déterminer un dysfonctionnement global et significatif. Elle ne permet pas de localiser la région du myocarde qui peut être à la source de celui-ci. L'épaississement pariétal est une mesure plus locale, puisqu'il est calculé en plusieurs points de la paroi myocardique. Mais c'est une mesure qui intègre toutefois la déformation de toute l'épaisseur de la paroi, et qui demeure de ce fait ambiguë.

Sans remettre en cause l'utilité des mesures globales ou semi-locales, la recherche actuelle a pour objectif de déterminer de manière plus précise les déformations du myocarde au cours du cycle cardiaque. Si l'on considère que le myocarde comme un milieu continu, ses déformations sont peuvent être complètement définies par l'estimation, en tout point du myocarde, du tenseur de déformation à six composantes distinctes.

1.3.1 Modalités d'imagerie pour l'étude de la contraction du coeur

Les modalités d'imagerie fournissant des informations sur la contraction du coeur sont nombreuses et se distinguent sur plusieurs aspects : nécessité ou non d'injecter un produit de contraste, imagerie 2D ou 3D, résolution spatiale et temporelle,... En terme d'étude de la déformation du myocarde, la différence majeure repose sur la nature des informations de mouvement qui sont fournies. Si toutes les modalités citées ci-dessous permettent d'accéder au mouvement des interfaces du myocarde, plus rares sont celles qui permettent de déterminer la déformation à l'intérieur de la paroi myocardique.

Ventriculographie de contraste et tomodensitométrie à rayons X

La ventriculographie de contraste nécessite l'injection d'un agent de contraste et ne fournit qu'une vue en projection de la cavité ventriculaire gauche en mouvement. Elle a été pendant longtemps le standard d'évaluation de la cinétique pariétale. Le tomodensitométrie à rayons X requiert également l'utilisation d'un agent de contraste et utilise des mesures d'atténuation pour produire des coupes du coeur. A partir des contours extraits des images, il est possible d'obtenir une reconstruction 3D de la surface endocardique du VG. Les scanners multisources permettent d'accélérer l'acquisition des données. Avec le Dynamic Spatial Reconstructor (DSR) [RRH85], il a ainsi été possible d'acquérir près de 20 volumes 3D au cours d'un cycle cardiaque chez le chien. Ces deux techniques basées sur les rayons X ne donnent pas d'information dans le myocarde.

Echocardiographie

L'échographie bidimensionnelle est l'examen de routine du cardiologue. L'échocardiographie de mode TM (en anglais : Time Motion) permet d'observer dans une direction donnée l'évolution des parois endocardique et épicaudique en temps réel (cadence vidéo). L'imagerie Doppler, initialement introduite pour observer des flux sanguins peut être utilisée

pour visualiser la vitesse de la paroi [MSMG92, FMSH94]. Les images 2D de vitesse ont cependant une résolution spatiale limitée à quelques millimètres.

Imagerie par Résonance Magnétique (IRM)

L'IRM [DBIP94] est une technique d'imagerie non invasive qui peut fournir des informations anatomiques et fonctionnelles avec une résolution spatiale de l'ordre du millimètre. Basée sur l'observation du retour à l'équilibre des moments magnétiques des noyaux d'hydrogène perturbés par l'application d'un champ Radio Fréquence, elle est bien adaptée à l'exploration des tissus riches en eau comme les tissus mous et en particulier du muscle cardiaque. Les séquences IRM rapides synchronisées sur l'Electrocardiogramme (ECG) permettent actuellement d'obtenir jusqu'à 16 phases du cycle cardiaque en une apnée d'une quinzaine de secondes limitant ainsi les artefacts dus au mouvement respiratoire (Figure 1.4). Néanmoins, cette imagerie requiert plusieurs cycles cardiaques pour acquérir un seul plan de coupe. Sa résolution temporelle est, de ce fait, limitée. Cependant, les progrès récents en imagerie Echo-Planar laissent penser que l'on accédera bientôt à de l'IRM cardiaque à la cadence vidéo, avec une bonne qualité d'images.

Le traitement des images fournies par de telles séquences sur plusieurs niveaux de coupes permet d'accéder à des paramètres quantitatifs d'intérêt clinique relatifs à l'anatomie 3D du cœur (forme, volume des cavités, masse myocardique) et à sa fonction contractile globale (fraction d'éjection). Des traitements plus sophistiqués peuvent fournir une information plus locale sur le mouvement du cœur. La cinétique pariétale peut être étudiée en 3D par des techniques basées sur l'analyse des courbures des surfaces cardiaques (cf. section 1.3.2). Les séquences classiques d'IRM fournissent cependant peu d'informations sur les déformations à l'intérieur du muscle, puisque celui-ci apparaît relativement homogène dans les images.

IRM de marquage tissulaire

L'IRM de marquage tissulaire a été introduite pour pallier ce problème. Proposée parallèlement par les équipes de E. Zerhouni (Johns Hopkins Univ., Baltimore, USA) [ZPRY88] et de L. Axel (Univ. of Pennsylvania, Philadelphie, USA) [AD89b, AD89a], l'IRM de marquage tissulaire consiste à créer préalablement à la séquence d'imagerie rapide un motif de marquage par saturation magnétique localisée des noyaux de la matière. Le motif est créé en quelques millisecondes et la première image télé-diastolique de la séquence synchronisée sur l'électrocardiogramme (ECG) montre des bandes noires rectilignes superposées au myocarde (Figure 1.5-a). Ces bandes vont se déformer au cours du cycle cardiaque en suivant le mouvement imposé par le myocarde (Figure 1.5). Différents motifs de marquage peuvent être réalisés (Figure 1.6).

Notons que la perturbation magnétique induite par le marquage est transitoire et décroît en fonction du temps de relaxation longitudinal T_1 qui est de l'ordre de 600ms

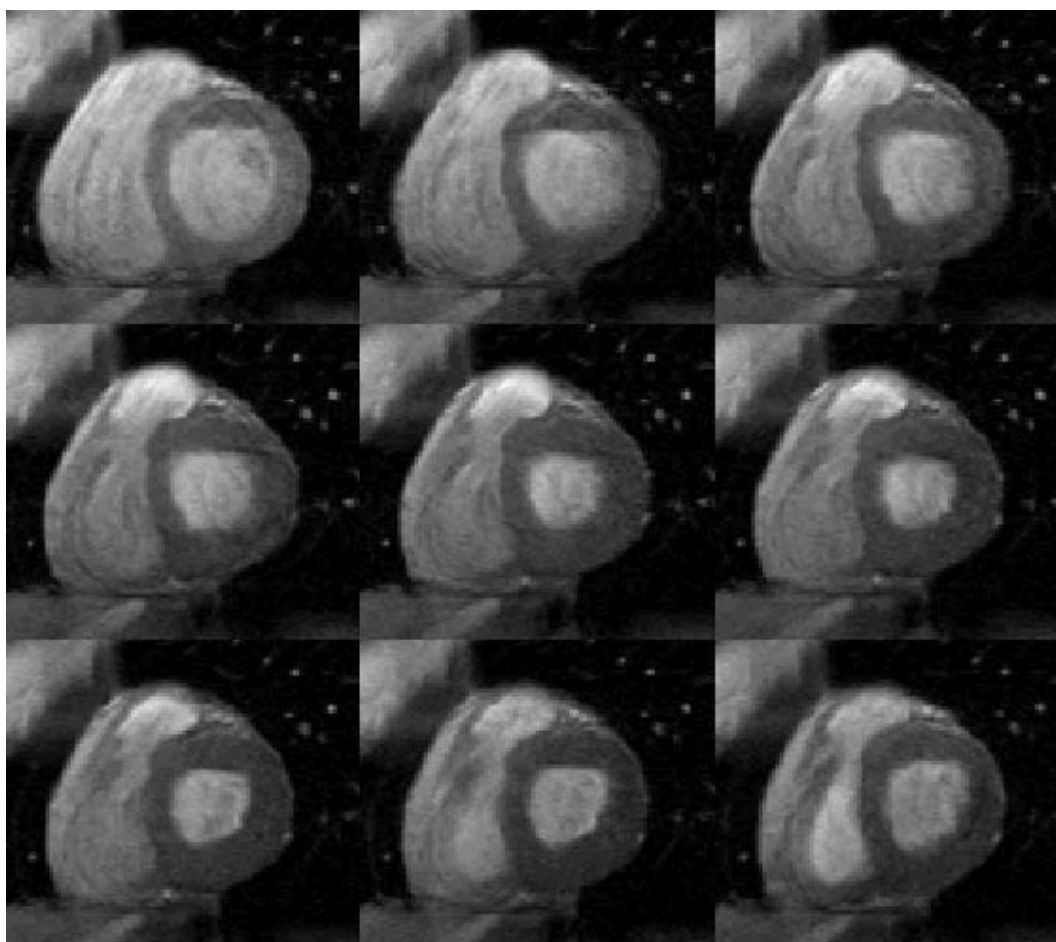


FIG. 1.4 – Série temporelle de 9 images, mono-coupe, en orientation petit axe obtenues en IRM avec une séquence rapide TurboFLASH (à lire de gauche à droite et de haut en bas). La télédiastole correspond à la première image et la télésystole l'image centrale.

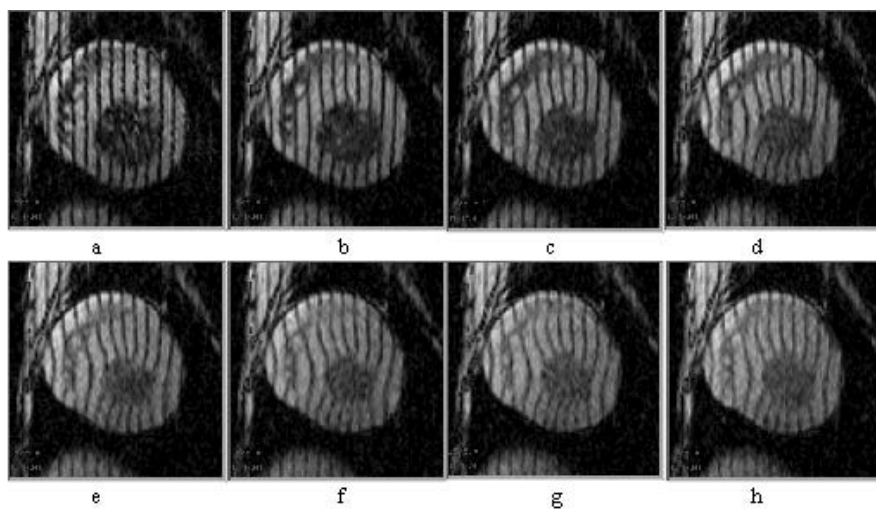


FIG. 1.5 – Huit phases du cycle cardiaque d’une séquence d’Imagerie par RM de marquage tissulaire en orientation petit axe avec un motif vertical (Acquisition réalisée au Johns Hopkins Hospital, Baltimore, USA, sur un coeur de chien).

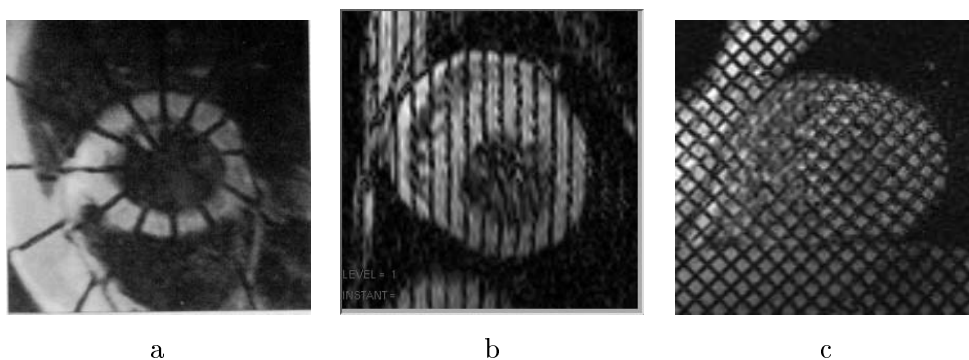


FIG. 1.6 – Différents motifs de marquage tissulaire en IRM, vus sur en coupe petit-axe.
a : Marquage radial. b : Marquage en lignes. c : Marquage en grille.

pour le coeur. Ceci limite la durée de suivi du marquage à une portion du cycle cardiaque (environ 400ms). C'est suffisant, pour étudier la systole cardiaque en synchronisant l'acquisition sur la fin de la diastole (Pic R de l'ECG). Pour analyser le mouvement sur l'ensemble du cycle, il faut refaire de nouvelles acquisitions en imposant un délai correspondant à l'instant d'acquisition de la dernière image de la série précédente.

IRM de contraste de phase

L'IRM de contraste de phase [PHSE91, Wed92] exploite le déphasage des spins en mouvement pour calculer la vitesse en un point de l'espace 3D. Cette technique est théoriquement capable de fournir un champ dense de vitesse, c'est à dire un vecteur vitesse en chaque pixel. Pour chaque niveau de coupe, 4 acquisitions sont habituellement requises (une référence et 3 dimensions du mouvement). Les mesures de vitesse sont très sensibles au bruit et aux erreurs de phase. Ces erreurs peuvent s'accumuler au cours du temps lors de l'étape de reconstruction du mouvement. C'est pourquoi l'exploitation des mesures fait intervenir une procédure de régularisation dans le muscle préalablement segmenté afin d'éviter de prendre en compte des vitesses élevées dans la cavité ventriculaire [CRSG94, MCSD96, ZDP97].

1.3.2 Techniques d'estimation quantitative du mouvement du coeur : une revue

L'estimation du mouvement du coeur a suscité durant ces dernières années un nombre important de travaux en traitement d'images. Nous proposons dans cette section un bref aperçu de ces nombreuses contributions. Nous distinguons les approches contours-surfaces des approches volumiques.

Approches surfaciques de l'estimation de mouvement

De nombreux travaux ont été menés pour estimer le mouvement des interfaces du VG, soit en 2D (contours) soit en 3D (surfaces). Deux types de problèmes doivent être résolus :

- la segmentation des données pour en extraire les interfaces.
- La mise en correspondance temporelle des interfaces pour accéder au mouvement.

La segmentation est souvent effectuée à l'aide de modèles déformables plus ou moins élaborés. Dans [SSC⁺00], un contour actif est utilisé pour extraire les contours du VG de chaque coupe d'un examen IRM. Ces contours sont échantillonnés et une surface est construite par triangulation du nuage de points ainsi obtenu. Les surfaces actives permettent d'obtenir directement une surface par segmentation d'une pile de coupes ou d'un volume [MT95].

Après l'étape de segmentation, on dispose d'un ensemble de surfaces pour chaque phase de l'examen. Le problème posé est alors de construire la trajectoire temporelle des points de ces surfaces. Sans hypothèse additionnelle, ce problème est sous-déterminé puisque il existe

un multitude de techniques pour mettre en correspondance deux surfaces. Des travaux proposent par exemple de mettre en correspondance des régions de courbure similaire [KG94, CFM97] ou définissent un énergie de flexion-étirement (liée à la courbure) comme critère de correspondance à minimiser [AD92, CAS92, DLSZ91, MD97, Tag99]. Papademetris et al [PSDD01] utilisent un modèle élastique non isotrope prenant en compte l'orientation des fibres cardiaques pour affiner l'estimation de la déformation dans le myocarde.

Certains travaux abordent les problèmes de la segmentation et de la mise en correspondance de manière conjointe grâce à un processus de *suivi* [MS99, JNB98, Ran95, RB97]. Le coeur est en général segmenté dans la première phase du cycle grâce à un modèle déformable. Le résultat obtenu sert d'initialisation dans la phase suivante, et ce schéma est reproduit dans toutes les phases de la séquence. Malassiotis [MS99] propose un modèle d'apprentissage en temps réel du mouvement : les trajectoires des points de contour aux instants précédents permettent d'établir une prédiction de la nouvelle position du contour. Un filtre de Kalman permet de combiner cette prédiction avec les informations fournies par l'image. Jacob [JNB98] utilise également un modèle prédictif de mouvement, mais celui-ci est construit par apprentissage sur un ensemble de données pré-segmentées.

Les méthodes évoqués précédemment fournissent une information de déformation limitée aux interfaces. Elles sont utilisées principalement pour des modalités d'imagerie telles que l'IRM, ou l'échographie de mode TM et de mode B, qui apportent peu d'information sur les déformations à l'intérieur du muscle cardiaque.

Approches volumiques de la déformation

Ces approches tentent d'estimer la déformation dans toute l'épaisseur du muscle.

Les techniques de flux optique permettent toutefois d'obtenir des champ de déplacement sans segmentation préalable. Elles ont été appliquées à l'angiographie X 3D cardiaque [SLBN94, GFM94, GFCM94, GFM97] ou en ciné-IRM standard [PMR⁺98, Pla99]. Dans les travaux de Planat, la prise en compte des discontinuités permet d'estimer des vitesses cohérentes aux interfaces endocarde-cavité et épiscarde-extérieur du coeur. L'estimation de vitesse est valide même en présence d'une évolution locale importante du niveau de gris des images au cours de la séquence, ce qui est un phénomène courant en IRM cardiaque.

Nous avons vu précédemment que l'IRM de contraste de phase et l'IRM de marquage tissulaire sont les deux principales modalités d'imagerie qui fournissent des informations sur le mouvement à l'intérieur du myocarde. De nombreux travaux exploitent ces informations :

a- IRM de contraste de phase

La méthode de Meyer et al. combine les contours interne et externe du VG et le champ de vitesse régularisé pour estimer les trajectoires des nœuds d'un maillage du ventricule [MCSD96]. L'estimation est guidée par un filtre de Kalman intégrant un modèle

périodique temporel du mouvement. Duncan [DSCS98] propose une approche semblable en 3D. Il ajuste le comportement d'un modèle élastique dynamique de VG aux données de surface et de vitesse fournies par l'IRM. Le groupe de Stanford utilise l'algorithme de suivi de Fourier [ZDP96] pour estimer les trajectoires de groupes de points et un modèle local de déformation afin de quantifier celle-ci dans le myocarde .

b- IRM de marquage tissulaire

L'IRM de marquage tissulaire a donné lieu à de nombreux travaux spécifiques, compte tenu des images particulières qu'elle fournit. La majeure partie d'entre eux décomposent le problème de l'estimation du mouvement en deux sous-problèmes qui sont :

- La détection dans chaque image des lignes de marquage et des contours du VG. Celle-ci s'effectue le plus souvent au moyen de contours actifs [ACC⁺98, HMA00, YKA95] et demeure un problème délicat nécessitant une supervision humaine.
- L'ajustement d'un champ de déplacement par une interpolation du déplacement des lignes de marquage et des contours.

Nous en présentons ici les principales méthodes :

O'Dell et al. proposent d'ajuster un champ de déplacement 3D à partir des données de marquage [OMH⁺95]. L'ajustement est réalisé indépendamment pour les trois coordonnées du déplacement en estimant la déformation, de l'état déformé à l'état initial non déformé. Les déplacements et les déformations 3D sont estimés aux nœuds d'un maillage représentant le myocarde ventriculaire gauche.

La méthode proposée par Park et Metaxas [PMYA96] est basée sur un modèle déformable dont les paramètres sont des fonctions linéaires par morceau. Ces fonctions au nombre de six, décrivent de façon intuitive le mouvement global du VG, comme la contraction radiale ou la torsion du grand axe. Les forces nécessaires à la dynamique du modèle sont issues des contours internes et externes du VG et des points d'intersection d'un marquage en grille (SPAMM). Les forces sont calculées aux sommets d'éléments de volume prismatiques localisés sur les contours. Les paramètres du modèle dans le myocarde sont donc une approximation linéaire des valeurs au bord.

Declerck et al. modélisent le mouvement du VG par une transformation spatio-temporelle continue [Dec97]. Le myocarde ventriculaire gauche est représenté dans un système de coordonnées planisphérique proposé par les auteurs. Dans ce système, le mouvement est modélisé par des fonctions affines dont les paramètres sont déterminés par minimisation d'un critère du type spline de lissage (combinaison d'un terme d'attache aux données et d'un terme de lissage basé sur les dérivées secondes). Trois paramètres représentent la contraction radiale, la rotation autour du grand axe et la contraction longitudinale en chaque point du modèle.

Notre groupe a développé une méthode d'ajustement d'un modèle global du champ de déplacement dans l'espace et dans le temps [CBK⁺00]. Le calcul des paramètres décrivant

le mouvement comme le champ de déplacement, de déformation ou de vitesse est réalisé analytiquement. Combinée à une technique de visualisation de champs de vecteurs également développée au laboratoire, la méthode, implantée en 2D+temps et 3D+temps, fournit des représentations de l'évolution des paramètres représentatifs du mouvement au cours de la systole sous forme de séquences animées [KCFO98].

Certains auteurs proposent une estimation du champ de déplacement sans extraction préalable des lignes de marquage. Radeva [RAH97] et Young [You99] utilisent un modèle 3D volumique de VG incorporant des plans de marquage virtuels. Une fonction de coût mesure, pour une déformation donnée du modèle, l'ajustement des lignes de marquage virtuelles (i.e. l'intersection des plans virtuels avec les plans des images) avec le contenu des images. L'ajustement du modèle aux images est obtenu par minimisation d'une énergie prenant en compte la fonction de coût, ainsi qu'un terme de régularisation.

Les techniques de flux optique ont été également utilisées en IRM de marquage tissulaire [PM92, GPAT97, DAB⁺99]. Pour prendre en compte la décroissance progressive du contraste des lignes de marquage, Prince [PM92] incorpore dans l'équation du flux optique un terme modélisant cette décroissance et Dougherty [DAB⁺99] applique l'équation du flot optique sur des images filtrées.

Citons enfin les travaux de Haber [HMA00]. Celui-ci utilise un modèle bi-cavités pour reconstruire le mouvement du VG et du VD. Ce modèle est directement construit à partir des contours segmentés et est doté de propriétés d'élasticité permettant de régulariser l'estimation du champ de déformation.

1.4 Conclusion - Choix de recherche

Comme nous l'avons vu, les modèles déformables surfaciques sont fréquemment utilisés pour la segmentation et le suivi en imagerie cardiaque. Dans ce type d'approche, les différentes interfaces du coeur sont segmentées séparément. C'est une limitation évidente que de ne pouvoir traiter le coeur, ou même le VG, dans son ensemble. Certaines approches ont recours aux Déformations de Formes Libres (FFD, voir chapitre 2) [BCA96, LRMK99] pour manipuler simultanément plusieurs surfaces, mais cette méthode de déformation ne permet qu'une représentation simpliste des interactions entre les différentes surfaces de l'objet. Nous détaillerons un peu plus cet aspect au chapitre suivant.

Par ailleurs, les paramètres de mouvement et de déformation (champ de déplacement, tenseur de déformation, etc) que l'on cherche à déterminer sont des paramètres volumiques, c'est-à-dire définis en tout point du muscle cardiaque, et non pas seulement aux interfaces. Les approches surfaciques ne permettent pas le calcul direct de tels paramètres.

Nous apportons des réponses à ces deux problèmes en proposant, dans ce travail de thèse, un modèle déformable volumique. Le terme volumique signifie qu'il permet de modéliser l'épaisseur des objets (par exemple d'une paroi myocardique). Le modèle proposé s'appuie sur des propriétés d'élasticité et la Méthode des Éléments finis (MEF). Il

permet de segmenter et suivre un objet dans son ensemble, y compris un objet de géométrie complexe tel que le système VG+VD, comme nous le montrerons au chapitre 5. Le modèle déformable que nous proposons fait partie des *gabarits déformables* puisque qu'il intègre un modèle géométrique précis ainsi qu'un modèle de déformation.

Avant de présenter ce modèle déformable élastique (chapitre 4), nous proposons une étude des gabarits déformables utilisés en traitement d'images (chapitre 2), afin de situer notre approche par rapport à l'existant. Nous exposons ensuite les principes de l'élasticité et de la Méthode des Éléments Finis (chapitre 3) sur lesquels est basé notre travail. Le chapitre 5 est consacré à l'exposé de résultats de l'application du modèle déformable élastique en IRM standard. Le chapitre 6 décrit une extension du modèle déformable élastique pour application à des images texturées telles que les images de marquage tissulaire.

Chapitre 2

Les gabarits déformables

2.1 Introduction : du modèle déformable au gabarit déformable

En matière de segmentation d'images, on distingue généralement deux classes d'approches [CP95] : les approches *régions* qui subdivisent l'image en régions selon des critères d'homogénéité, et les approches *frontières* qui cherchent à identifier les contours d'un ou plusieurs objets présents dans l'image. La segmentation par *modèles déformables* fait partie de la deuxième classe.

Le concept de modèle déformable a été introduit par Kass en 1987 [KWT87] avec le *contour actif*, baptisé en anglais *snake*, courbe évoluant dans une image pour s'ajuster au contour d'un objet. La convergence de la courbe vers les frontières de l'objet est obtenue par la minimisation d'une fonctionnelle E appelée *énergie du modèle*. Si le contour est représenté par son équation paramétrique $C : \mathbf{x}(s) = (x(s), y(s))^t$, l'expression de E est :

$$E = \underbrace{\int_C \left| \frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial s} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{x}(s)}{\partial s^2} \right|^2 ds}_{E_i} + \lambda \underbrace{\int_C P(\mathbf{x}(s)) ds}_{E_e} \quad (2.1)$$

où E_i et E_e sont respectivement l'*énergie interne* et l'*énergie externe*, et λ un coefficient de pondération. L'énergie interne est composée d'un terme de tension (dérivée première), et d'un terme de flexion (dérivée seconde). L'énergie externe est généralement calculée à partir d'un champ de potentiel P dont les minima locaux sont situés sur les points de contour présents dans l'image (voir [CC93] pour une étude de quelques techniques de calcul de ce champ de potentiel). La fonction de l'énergie externe (appelée également *énergie d'attache aux données*) est d'attirer la courbe vers les points de l'image susceptibles d'appartenir à la frontière de l'objet étudié. Le mot "susceptible" traduit la difficulté du problème : les images étant généralement bruitées, de faux points de contour peuvent exister. La présence dans l'image d'objets autres que celui qui est étudié peut également générer des contours "parasites". Inversement, des portions de la frontière de l'objet peuvent être invisibles en raison de l'imperfection du système d'imagerie. Tous ces phénomènes font que la seule minimisation d'une énergie externe ne suffit pas à obtenir les bons contours d'un

objet. Des contraintes supplémentaires de régularité des contours sont donc imposées par l'introduction de l'énergie interne.

A partir de l'exemple du contour actif, on peut mettre en évidence les principes généraux du modèle déformable. Un modèle déformable est composé d'une représentation mathématique d'un objet (représentation discrète ou paramétrique, surfaces triangulées en 3D, etc.) capable de se déformer, d'une énergie interne qui va pénaliser les formes non souhaitées (action régularisante), et d'une énergie externe qui va guider les déformations en fonction du contenu des données.

Chacun de ces trois éléments, ainsi que les méthodes de minimisation de l'énergie totale du modèle déformable, a fait l'objet de recherches intenses. Parmi les nombreuses synthèses bibliographiques existant sur le sujet, nous recommandons la lecture de [MIT96, Rüe97, Mon99]

Comme nous l'avons dit, l'énergie interne du contour actif permet de pénaliser les courbes non régulières. Elle introduit donc dans le modèle une connaissance *a priori* sur le résultat attendu. Dans le cas du contour actif, la contrainte sur la forme de la courbe est relativement faible, puisque des courbes de formes très variées peuvent être également régulières. De ce fait, le contour actif peut être utilisé pour segmenter divers objets. Cette généralité a pour contrepartie des résultats de segmentation peu fiables dans certaines applications où la qualité des images est relativement médiocre. C'est notamment le cas en imagerie cardiaque, où les mouvements du coeur imposent des contraintes d'acquisition qui ont un retentissement sur la qualité des images. Pour répondre à cette difficulté et améliorer la performance du modèle déformable, on peut introduire une connaissance *a priori* sur la forme de l'objet que l'on veut segmenter. Les modèles déformables ainsi obtenus sont appelés *gabarits ou patrons déformables*, traduction du terme anglais *deformable template*

Nous décrivons d'abord les principaux gabarits existant dans la littérature. Nous effectuons ensuite une synthèse des principes gouvernant les gabarits déformables.

2.2 Principaux gabarits déformables

Les gabarits déformables que nous avons sélectionnés nous semblent représentatifs de l'ensemble des travaux dans ce domaine. Les plus anciens, tels le *modèle de forme active* [CTCG95] ou *l'atlas déformable* [BK89] ont eu de nombreux prolongements.

2.2.1 Modèle de forme active

Le modèle de forme active [CTCG95] est basé sur un apprentissage des "modes de variation" d'une classe d'objets à partir d'un échantillon représentatif de cette classe. Cet apprentissage permet de réduire considérablement l'espace de recherche lorsqu'on souhaite segmenter une forme quelconque de cette classe.

Les objets de l'échantillon sont supposés alignés entre eux, et chacun d'eux est représenté par un ensemble de n points caractéristiques étiquetés manuellement. Les coordonnées de

ces points sont regroupées dans un vecteur, noté \mathbf{c}_j pour le j -ème objet (de dimension $2n$ en 2D). On calcule la moyenne statistique du vecteur de paramètres, notée $\bar{\mathbf{c}}$, et les variations de la forme de l'objet au sein de l'échantillon (supposé de taille m) peuvent être représentées par la matrice de covariance $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\mathbf{c}_j - \bar{\mathbf{c}})(\mathbf{c}_j - \bar{\mathbf{c}})^t \quad (2.2)$$

On effectue ensuite une analyse en composantes principales (ACP), par un calcul des valeurs et vecteurs propres (λ_i, \mathbf{e}_i) de $\mathbf{\Sigma}$, définies par :

$$\mathbf{K}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad \text{avec} \quad |\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}| \quad \text{et, en 2D} \quad 1 \leq i \leq 2m \quad (2.3)$$

Il est possible d'exprimer chaque forme de l'échantillon comme une combinaison linéaire des vecteurs propres :

$$\mathbf{c}_j = \bar{\mathbf{c}} + \mathbf{P}\mathbf{b}_j \quad \text{avec} \quad \mathbf{P} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2m}) \quad (2.4)$$

Le vecteur \mathbf{b}_j est le vecteur des paramètres de la forme. Les vecteurs propres ont des propriétés remarquables. Ceux qui sont associés aux valeurs propres les plus élevées correspondent à des modes de variation fréquents dans l'échantillon. Au contraire, ceux qui sont associés aux valeurs les plus faibles décrivent des variations négligeables. Ainsi, Cootes et al. [CTCG95] ont appliqué ce principe à la modélisation de la main à partir d'un échantillon de 18 individus, chacun représenté par 72 points. Ils ont mis en évidence que 96% des variations de forme peuvent être décrites par les 6 premiers vecteurs propres. Il est donc intéressant de ne conserver que les premières valeurs propres pour décrire les formes de la classe. Une forme quelconque \mathbf{c} peut être modélisée, avec une bonne approximation, de la manière suivante :

$$\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}} + \mathbf{P}\mathbf{b} \quad (2.5)$$

avec $\mathbf{P} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ et $k \ll 2m$. Le vecteur \mathbf{b} est le vecteur réduit des paramètres (dimension k). Le processus de segmentation utilisant cette modélisation consiste à rechercher le vecteur \mathbf{b} qui permet de satisfaire une fonction de mise en correspondance avec les données. En plus d'être de dimension réduite grâce à l'apprentissage, l'espace de recherche est limité aux formes dont la distance de Mahalanobis (introduite plus loin, voir équation (2.28)) est inférieure à un seuil donné.

Le principe de l'apprentissage par ACP pour la construction d'un gabarit déformable a été abondamment utilisé [BI98]. Jacob l'applique à la segmentation en échographie cardiaque [JNB98], Kelemen [KSG99] et Dutae [DS98] à la segmentation de structures du cerveau en IRM. Notons qu'un certain nombre de travaux utilisent l'ACP pour construire non seulement un modèle de forme, mais également un modèle d'intensité [KSG99, CET98, BS00].

2.2.2 Gabarit déformable de Rüeckert

- Rueckert [RB97] propose un gabarit déformable construit à partir de quatre éléments :
- une forme de référence, représentée par un ensemble de points : $\mathcal{V} = \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$. Ces points sont en principe des points de la surface de l'objet que l'on étudie, et peuvent appartenir à plusieurs objets (plusieurs surfaces par exemple).
 - Un ensemble de points $\mathcal{V}' = \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_N$ décrivant la forme de référence après déformation (et qu'il faudra donc estimer).
 - Une fonction de *pénalisation* E_i (ou énergie interne), qui mesure l'écart entre le gabarit déformé et la forme de référence.
 - une énergie externe E_e .

Conformément à ce que nous avons exposé en introduction, la fonction de pénalisation traduit la connaissance a priori que l'on introduit dans l'ajustement aux données. Pour définir la fonction de pénalisation, Rüeckert introduit une fonction de transformation de l'espace \mathbf{F} . En 3D, un point $\mathbf{v} = (x, y, z)^t$ est transformé en $\mathbf{v}' = (x', y', z')^t$:

$$\mathbf{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Le gabarit déformé est le résultat de l'application de cette fonction de transformation à la forme de référence, ce qui se traduit par le problème d'interpolation suivant :

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}'_i \quad , \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (2.7)$$

Pour chacune des fonctions f_α (avec $\alpha = x, y, z$), on définit une énergie E_α :

$$\begin{aligned} E_\alpha = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z^2} \right)^2 + \dots \right. \\ & \left. \dots + 2 \left[\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y \partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (2.8)$$

La fonction de pénalisation du gabarit est alors :

$$E_i = E_x + E_y + E_z \quad (2.9)$$

Notons que cette fonction de pénalisation est invariante pour les transformations affines. Il reste à définir la fonction de transformation \mathbf{F} de manière à pouvoir calculer une expression de la fonction de pénalisation en fonction des paramètres du problème, c'est-à-dire la position des points du gabarit déformé (ensemble \mathcal{V}'). Parmi toutes les fonctions qui satisfont le problème d'interpolation 2.7, Rüeckert porte son choix sur celles qui minimisent 2.8, à savoir les splines de plaque mince 3D [Wah90, Boo89] :

$$f_\alpha(\mathbf{v}) = a_\alpha^1 + a_\alpha^2 x + a_\alpha^3 y + a_\alpha^4 z + \sum_{i=1}^N b_\alpha^i \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_i\| \quad (2.10)$$

Pour déterminer les coefficients a_α^j et b_α^i , on définit les matrices suivantes :

$$\mathbf{U} = (U_{ij}) \quad \text{avec} \quad U_{ij} = \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\| \delta_{ij} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & y_N & z_N \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x'_N & y'_N & z'_N \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{b}_\alpha = (b_\alpha^1, \dots, b_\alpha^N)^t \quad \mathbf{a}_\alpha = (a_\alpha^1, \dots, a_\alpha^4)^t \quad (2.14)$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^t & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{L}_N^{-1} : \text{sous-bloc } N * N \text{ de } \mathbf{L}^{-1} \text{ tel que } \mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_N^{-1} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

Le problème d'interpolation 2.7 s'écrit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^t & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_x & \mathbf{b}_y & \mathbf{b}_z \\ \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

On calcule alors les coefficients recherchés par inversion matricielle. On est alors en mesure de calculer l'énergie interne grâce aux formules (2.8) et (2.9). Son expression est :

$$E_i(\mathcal{V}') = \mathbf{V}'^T \mathbf{K} \mathbf{V}' \quad \text{avec} \quad \mathbf{K} = \mathbf{L}_N^{-1} \mathbf{U} \mathbf{L}_N^{-1} \quad (2.19)$$

L'énergie externe du gabarit est définie comme la somme des valeurs en chaque point de \mathcal{V}' d'une fonction faisant intervenir le gradient et le Laplacien de l'image. La minimisation de l'énergie totale $E(\mathcal{V}') = E_i(\mathcal{V}') + E_e(\mathcal{V}')$ est effectuée par un recuit simulé ou par la méthode ICM (Iterated Conditional Mode).

2.2.3 La pyramide déformable de Reissman et Lötjönen

Reissman et Lötjönen ont introduit un gabarit déformable [RLN⁺97, Rei97, LRMK99, LMR⁺98] pour la segmentation multi-objets et en particulier la segmentation du thorax et de ses structures (poumons et enveloppe péricardique). Il consiste en un ensemble de surfaces triangulées (Figure 2.1) qui sont déformées par l'intermédiaire d'une fonction de transformation de l'espace de type FFD (Free Form Deformation, Figure 2.2). La boîte englobante du gabarit est divisée régulièrement en éléments parallépipédiques qui définissent une grille de $(l+1) * (m+1) * (n+1)$ points \mathbf{P}_{ijk} . La fonction de transformation est définie par un produit tensoriel :

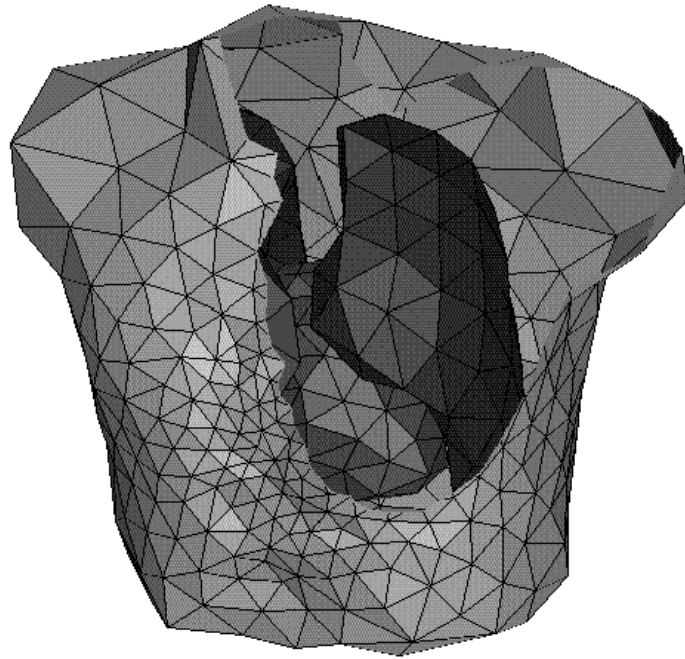


FIG. 2.1 – Surfaces triangulées du thorax, des poumons et du péricarde.

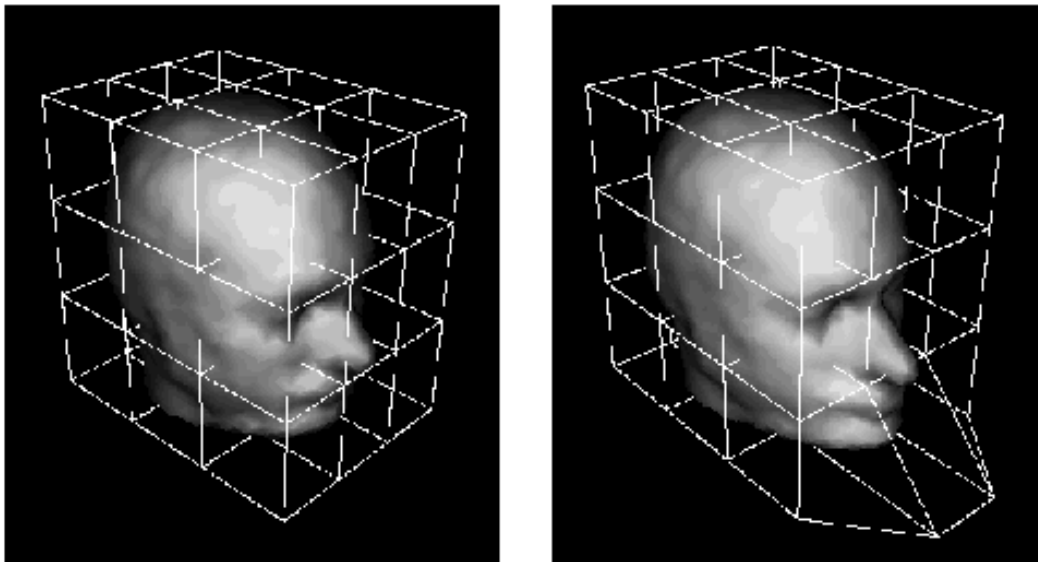


FIG. 2.2 – Principe de la FFD : le déplacement de points de contrôle génère une déformation continue au sein de la boîte englobante.

$$\mathbf{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n Q_{l,i}(x) Q_{m,j}(y) Q_{n,k}(z) \mathbf{P}'_{ijk} \quad (2.20)$$

où les $Q_{\alpha,\beta}$ sont des polynômes et les \mathbf{P}'_{ijk} sont les nouvelles positions des points de la grille. Deux types de polynômes sont utilisés :

- des polynômes d'ordre 1, permettant de réaliser une interpolation linéaire,
- les polynômes de Bernstein.

Pour préserver la forme du maillage au cours de la déformation, une énergie interne est attachée au modèle. Trois formes d'énergie sont proposées, qui pénalisent respectivement :

- les variations de la direction des normales aux facettes triangulaires,
- les variations de courbure discrète aux sommets du maillage,
- les variations de la distance entre noeuds voisins du maillage.

Les expériences menées montrent d'une part que l'interpolation tri-linéaire est suffisante, et d'autre part, que les trois formes d'énergie interne produisent des résultats semblables.

Pour le calcul de l'énergie externe (i.e. d'attache aux données), le concept de carte de distance orientée est introduit de manière à prendre en compte la direction des contours et l'orientation locale du maillage dans la mise en correspondance. Les données volumiques sont transformées en un volume de contours binaires par un filtre de Canny-Deriche. Six volumes de tailles identiques sont alors créés, chaque volume conservant uniquement les points de contour dont l'orientation est proche d'une direction donnée (+x, -x, +y, -y, +z ou -z). On calcule ensuite 6 cartes de distance. Un noeud du maillage est associé à l'une de ces 6 cartes en fonction de l'orientation de la surface triangulée en cet endroit. L'énergie externe est alors la somme sur tous les noeuds des distances ainsi calculées.

La minimisation de l'énergie totale est effectuée grâce à un algorithme multirésolution. On construit une pyramide des données par lissage et sous-échantillonnages successifs des données initiales. En parallèle on construit une pyramide de maillages et de FFD, telle que lorsque l'on monte vers son sommet, le nombre de noeuds du maillage et de points de contrôle diminue. La pyramide est alors parcourue de haut en bas : à un niveau donné, on minimise l'énergie totale correspondante, et le résultat (i.e. la position du maillage obtenue) sert d'initialisation au niveau inférieur.

Un gabarit déformable à base de FFD a également été utilisé par Bardinnet [BCA96] pour la modélisation des surfaces du VG.

2.2.4 L'atlas déformable de Bajcsy

Bajcsy et Kovacic [BK89] propose une méthode de segmentation du cerveau basée sur la mise en correspondance d'un atlas élastique avec des données. L'atlas est construit à partir de données segmentées : il consiste en un volume dont les pixels ont un niveau de gris caractéristique de l'organe auquel ils appartiennent. Les propriétés d'un corps élastique homogène et isotrope sont attribuées à l'atlas, si bien qu'en présence de forces, la posi-

tion d'équilibre de l'atlas, représenté par le champ de déplacement \mathbf{u} , satisfait l'équation vectorielle :

$$-(\lambda + \mu) \operatorname{Grad}(\operatorname{Div}(\mathbf{u})) - 2\mu \operatorname{Div}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (2.21)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé (voir chapitre 3). Les forces \mathbf{f} sont calculées par dérivation d'une fonction de similarité qui mesure, pour un déplacement donné de l'atlas, l'adéquation de celui-ci aux données. Les équations précédentes sont résolues par la méthode des différences finies, dans une stratégie multirésolution. Les travaux de Bajcsy ont été étendus dans [GHRB94, GHLBB97, Gee99].

2.3 Synthèse sur les gabarits déformables

Nous avons vu au travers des exemples précédents qu'il existe une grande variété de gabarits déformables. Nous nous efforçons dans cette section de mettre en évidence des points communs et des passerelles entre ces différentes approches.

2.3.1 Principe de déformation

Un gabarit déformable permet de modéliser les variations de formes d'objets appartenant à une même classe (par exemple, la classe des ventricules gauches de coeur humain). Il est généralement constitué d'une forme de référence et d'un modèle des variations de forme. La forme de référence peut être la forme moyenne de la classe, comme chez Cootes [CTCG95]. Dans l'hypothèse où l'on ne dispose pas d'échantillon représentatif de la classe, on utilise une forme particulière comme forme de référence. Cette forme est obtenue généralement par une segmentation manuelle d'un jeu de données.

Chaque forme de la classe est décrite par un ensemble de paramètres, que nous appelons *paramètres descriptifs*, tels que des points échantillonnés sur la surface de l'objet. Les formes complexes rencontrées en imagerie médicale requièrent un nombre de paramètres descriptifs important. En conséquence, l'estimation directe de ces paramètres pour ajuster le gabarit à des données est une opération dont la complexité est grande. On cherche donc généralement à estimer d'autres paramètres, que nous appelons *paramètres de déformation* qui sont en nombre plus restreint. Les paramètres de déformation modélisent en fait les variations de formes au sein de la classe. Plusieurs méthodes permettent de construire un modèle des déformations.

Si l'on dispose d'une base d'apprentissage, l'ACP est une technique qui permet de déterminer les modes principaux de variation d'une classe (cf. section 2.2.1). La mise en correspondance avec des données du gabarit ainsi construit revient à déterminer les paramètres de déformation \mathbf{b} qui sont reliés aux paramètres descriptifs \mathbf{c} par une relation affine (cf. équation (2.4)) :

$$\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}} + \mathbf{P}\mathbf{b} \quad (2.22)$$

où \mathbf{P} est une matrice contenant les modes principaux de variation.

Lorsque l'on ne dispose pas de base d'apprentissage, on peut réduire le nombre de paramètres de déformation en exploitant les propriétés de l'énergie interne. De nombreux gabarits déformables ont une énergie interne quadratique qui conduit, après discrétisation, à une expression du type $\frac{1}{2}\mathbf{u}^t\mathbf{K}\mathbf{u}$, où la matrice \mathbf{K} porte généralement le nom de matrice de raideur et où le vecteur \mathbf{u} est tel que $\mathbf{c} = \bar{\mathbf{c}} + \mathbf{u}$. C'est le cas :

- des modèles élastiques linéaires [BK89, PS91, PH91]
- des modèles de type masses-ressorts [CCA92]
- du gabarit déformable basé sur les splines de plaque mince [RB97] (cf. section 2.2.2)

La matrice \mathbf{K} est semi-définie positive par construction. On peut donc exprimer le vecteur \mathbf{u} dans une base de vecteurs propres ou *base modale*. De nombreuses travaux proposent de tronquer la base modale [PS91, MPSK98, PH91, SP95b, CT95, NA93] (cf. section 3.4.2) pour réduire la complexité de la mise en correspondance. Cette opération de troncature a pour effet de supprimer les modes de déformation pénalisés fortement par l'énergie interne du modèle. L'opération de mise en correspondance du gabarit avec les données consiste à déterminer les coordonnées \mathbf{b} d'une forme dans la base modale tronquée. La relation entre \mathbf{c} et \mathbf{b} est identique à 2.22. La matrice \mathbf{P} est constituée de vecteurs propres de la matrice \mathbf{K} .

Par ailleurs, nous avons vu que certains gabarits introduisent une transformation de l'espace, notée \mathbf{F} . En 3D, un point $\mathbf{v} = (x, y, z)^t$ est transformé en $\mathbf{v}' = (x', y', z')^t$:

$$\mathbf{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Dans le cas d'un gabarit représenté sous forme d'un maillage, le maillage déformé est obtenu par application de la transformation aux noeuds du maillage. Le problème de mise en correspondance du gabarit avec les données est résolu par l'intermédiaire d'une recherche de la transformation adéquate. Le problème est en général simplifié en limitant la recherche à une classe de transformations particulières. Les FFD sont les transformations les plus utilisées [BCA98, RLN⁺97, RAH97, LRMK99, RSH⁺99]. On trouve également des transformations de l'espace construites à partir d'une base tronquée de fonctions harmoniques [JZL96].

L'intérêt du passage d'une déformation directe d'un maillage à une déformation par l'intermédiaire d'une transformation est analogue à celui de la troncature modale : il permet d'éliminer des déformations a priori non souhaitées. Une FFD à base de B-splines élimine par exemple certaines déformations non régulières.

Le parallèle avec la troncature modale peut être poussé plus loin. Considérons par exemple un maillage défini par ses noeuds $(S_i)_{1 \leq i \leq N}$ de coordonnées (x_i, y_i, z_i) . On définit trois vecteurs :

$$\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_N]^t \quad \mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_N]^t \quad \mathbf{Z} = [z_1, \dots, z_N]^t \quad (2.24)$$

La maillage est déformé par une FFD définie par (cf. section 2.2.3) :

$$\mathbf{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n Q_{l,i}(x) Q_{m,j}(y) Q_{n,k}(z) \mathbf{P}'_{ijk} \quad (2.25)$$

On peut écrire la relation de déformation du maillage sous forme matricielle en introduisant les éléments suivants :

- les vecteurs des coordonnées des points de contrôle :

$$\mathbf{P}_x = [x_{111}, \dots, x_{lmn}]^t \quad \mathbf{P}_y = [y_{111}, \dots, y_{lmn}]^t \quad \mathbf{P}_z = [z_{111}, \dots, z_{lmn}]^t$$

- le vecteur $\mathbf{Q}(x, y, z) = \begin{pmatrix} Q_{l,1}(x)Q_{m,1}(y)Q_{n,1}(z) \\ Q_{l,1}(x)Q_{m,1}(y)Q_{n,2}(z) \\ \vdots \\ Q_{l,1}(x)Q_{m,1}(y)Q_{n,n}(z) \\ Q_{l,1}(x)Q_{m,2}(y)Q_{1,n}(z) \\ \vdots \\ Q_{l,l}(x)Q_{m,m}(y)Q_{n,n}(z) \end{pmatrix}$

- la matrice \mathbf{M} des valeurs de \mathbf{Q} aux noeuds du maillage : $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(S_1)^t & \dots & \mathbf{Q}(S_N)^t \end{pmatrix}$

Dès lors, la position des noeuds du maillage déformé est obtenue par la relation :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \\ \mathbf{P}_z \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

En notant $\overline{\mathbf{X}}$, $\overline{\mathbf{Y}}$, $\overline{\mathbf{Z}}$, $\overline{\mathbf{P}}_x$, $\overline{\mathbf{P}}_y$ et $\overline{\mathbf{P}}_z$ les coordonnées initiales des noeuds et des points de contrôle, et en remarquant que la relation précédente est également valable pour ces coordonnées-là, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{X}} \\ \overline{\mathbf{Y}} \\ \overline{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M}^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \\ \mathbf{P}_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{P}}_x \\ \overline{\mathbf{P}}_y \\ \overline{\mathbf{P}}_z \end{pmatrix} \right] \quad (2.27)$$

On retrouve une expression affine tout-à-fait identique à (2.22).

Plus généralement, une mise sous forme affine peut être obtenue pour toutes les transformations définies par une combinaison linéaire de fonctions de base : polynômes (B-spline ou autres), fonctions harmoniques, fonctions radiales (splines de plaque mince, etc), ondelettes, etc.

Soulignons pour terminer qu'un problème de mise en correspondance d'un gabarit avec des données peut faire intervenir, successivement ou simultanément, plusieurs techniques de déformation. Ainsi Montagnat [MD98] propose ainsi un schéma où déformations "locales" (déplacement de chacun des noeuds du maillage) et "globales" (issues d'une transformation) sont combinées. Un coefficient de pondération permet de contrôler l'influence de chacun de ces types de déformation. En pratique, cette combinaison est utilisée

dans une approche hiérarchique où l'on passe progressivement des déformations globales comportant peu de degrés de liberté, aux déformations locales mettant en jeu tous les degrés de liberté du modèle.

2.3.2 Énergie interne d'un gabarit

L'énergie interne d'un gabarit déformable est une fonction qui pénalise, pour une forme donnée les écarts à la forme de référence. C'est en quelque sorte un mesure de distance entre formes. Deux cas de figure se présentent :

a- On dispose d'une base d'apprentissage

Lorsque l'on dispose d'une base d'apprentissage, la distance de Malahanobis D_m est la mesure de distance naturelle entre une forme quelconque et la forme moyenne de la base. Cette mesure prend en compte la dispersion des spécimens de la base. Son expression est donnée par :

$$D_m = \sqrt{(\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}})} \quad (2.28)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ est la matrice de covariance (voir équation (2.2)).

Une énergie interne basée sur cette distance est simplement $E_i = \frac{1}{2} D_m^2$. Ce résultat peut être justifié par des considérations statistiques. Si l'on suppose que le vecteur de paramètres obéit à une loi de probabilité gaussienne, alors un estimateur de cette loi est :

$$P(\mathbf{c}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\boldsymbol{\Sigma})^{1/2}} e^{-\frac{1}{2} D_m^2} \quad (2.29)$$

Un modèle déformable prenant en compte cette loi de probabilité peut être décrit par l'énergie interne quadratique suivante :

$$E_i(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} D_m^2 \quad (2.30)$$

comme établi à l'annexe A.

Si, à la suite d'une ACP, on n'a conservé que les k premiers modes $(\mathbf{e}_i, \lambda_i)$, l'expression de l'énergie devient [You00] :

$$E_i = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{e}_i^t (\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}})}{\lambda_i} \quad (2.31)$$

b- On ne dispose pas d'une base d'apprentissage Lorsque l'on ne dispose pas de base d'apprentissage, la définition d'une mesure de distance entre formes fait appel à des considérations géométriques ou aux techniques classiques de régularisation. Dans tous les cas, la mesure obtenue est assez universelle, dans le sens où elle est indépendante de l'application.

Lötjönen [LRMK99] propose plusieurs formulations d'énergie interne mesurant les variations de paramètres géométriques d'un maillage surfacique, tels que les directions des normales ou la courbure discrète aux noeuds.

Lorsque la déformation du gabarit est générée par l'intermédiaire d'une transformation de l'espace, l'énergie interne est très fréquemment une énergie de flexion (cf. équation (2.8)) [Mon99, Dec97, RAH97]. La théorie de l'élasticité est également utilisée pour son aptitude à produire des déformations régulières [BK89, Gee99].

Quelle type d'énergie interne choisir ? La méthode par apprentissage est souhaitable puisqu'elle réduit la quantité de connaissances externes introduites dans le gabarit et fournit une formulation spécifique à une classe d'objets. Cependant l'apprentissage requiert en général une étape de segmentation ou d'étiquetage manuelle longue et fastidieuse. La création d'une base d'apprentissage représentative de tous les cas de figure qui peuvent se présenter est également difficile. L'impossibilité de traiter des formes atypiques et imprévisibles avec la méthode par apprentissage est une limitation. C'est pourquoi les modèles dont les déformations sont contrôlées par des principes généraux de régularisation demeurent très utilisés. Plusieurs travaux proposent des gabarits mixtes permettant de mettre à profit les deux approches.

2.3.3 Gabarits mixtes

Nous avons évoqué à la section 2.3.1 les nombreux gabarits déformables qui ont une énergie interne quadratique du type $\frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{K} \mathbf{u}$, où la matrice \mathbf{K} porte généralement le nom de matrice de raideur et $\mathbf{u} = \mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}$.

Nous avons vu par ailleurs que l'étude d'une base d'apprentissage conduit à l'énergie interne suivante :

$$E_i(\mathbf{c}) = \frac{1}{2} (\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}})^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}}) \quad (2.32)$$

On constate que ces deux approches, a priori éloignées, conduisent à des représentations numériques semblables dans lesquelles \mathbf{K} et $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ jouent des rôles symétriques. Cette similitude est exploitée dans de nombreux travaux.

Ainsi, Cootes [CT95] utilise un modèle de type masse-ressort pour générer des formes de synthèse qui enrichissent une base d'apprentissage insuffisamment peuplée. Cette base enrichie est utilisée suivant le principe du modèle de forme active [CTCG95] pour segmenter des images. Les nouvelles formes segmentées sont incorporées à la base. Au fur et à mesure que la base "réelle" croît, l'influence des formes de synthèse est atténuée.

Wang [WS00] propose une méthode semblable pour combiner un modèle a priori et un modèle d'apprentissage. Chaque forme est représentée par un vecteur de paramètres $\mathbf{c} = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ composé des coordonnées des sommets d'un polygone 2D. La base d'apprentissage est traduite en terme de moyenne et de la matrice de covariance $(\bar{\mathbf{c}}, \boldsymbol{\Sigma}_{training})$, comme dans [CTCG95]. Pour compléter cette base, un ensemble virtuel de formes est créé, formes qui possèdent toutes des propriétés de régularité. Mais plutôt que de passer par un

modèle mécanique (contour actif, élasticité...) pour construire cet ensemble, Wang propose une méthode directe de construction de la matrice de covariance traduisant une contrainte de régularité. Cette méthode repose sur le constat suivant : lorsqu'un point du polygone se déplace, une manière simple de préserver la régularité de la forme consiste à déplacer les points voisins dans une direction analogue, avec une amplitude inférieure. Pour modéliser cette corrélation de déplacement, Wang utilise la matrice de covariance suivante :

$$\Sigma_{smooth} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

En supposant que cette matrice de covariance caractérise un ensemble virtuel de m' individus dont la moyenne est identique à celle de l'ensemble d'apprentissage (composé quant à lui de m individus) la matrice de covariance de la réunion de ces deux ensembles a pour expression :

$$\Sigma_{mix} = [\Sigma_{training} + w.\Sigma_{smooth}] \frac{1}{1+w} \quad \text{avec } w = \frac{m'}{m-1} \quad (2.34)$$

2.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les principaux gabarits déformables. Nous avons également mis en évidence les techniques qui permettent de les combiner ou de passer de l'un à l'autre pour tirer le meilleur profit de leurs avantages respectifs.

Compte tenu de l'objectif de ce travail, à savoir la conception d'un gabarit déformable pour la segmentation et le suivi en imagerie cardiaque, nous pouvons tirer les conclusions suivantes de cette étude des gabarits déformables :

- Les gabarits reposant sur un apprentissage ne peuvent être utilisés pour résoudre notre problème, car nous ne disposons pas d'une base d'apprentissage significative.
- Les gabarits reposant sur des fonctions de transformation de l'espace (FFD, spline de plaque mince, etc.) ne permettent qu'une représentation imparfaite d'un objet volumique. En effet, celui-ci n'est représenté que par ses surfaces. La dépendance éventuelle entre les déformations des surfaces est imposée via une contrainte de régularisation globale, c'est-à-dire couvrant tout le domaine de la fonction de transformation et pas seulement l'intérieur de l'objet. Ainsi, dans le cas des FFD, la contrainte de régularisation a souvent pour expression l'intégrale sur toute la boîte englobante d'un terme de flexion. Cette contrainte ne prend pas en compte la

géométrie de l'objet inscrit dans la boîte. Cette caractéristique rend difficile un contrôle précis des déformations de l'objet.

Ces conclusions nous ont donc conduits à utiliser la théorie de l'élasticité et la MEF pour concevoir notre gabarit déformable et modéliser un objet et ses déformations. Nous exposons les principes généraux de l'élasticité et de la MEF dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Élasticité et Méthode des Éléments Finis (MEF)

Dans ce chapitre, nous introduisons d'une part les notions fondamentales de la théorie de l'élasticité par l'intermédiaire de l'étude d'un problème type, et d'autre part la méthode numérique (MEF) utilisée pour résoudre les équations liées à ce problème.

3.1 Principes de l'élasticité

Nous étudions dans cette section les déformations d'un solide soumis à diverses sollicitations [Cia86]. Comme problème modèle, nous considérons un solide occupant une partie Ω de l'espace et nous supposons que :

- le solide est fixé sur une partie Γ_0 de son bord,
- l'intérieur du solide est soumis à un champ de forces volumiques \mathbf{f} ,
- le solide est soumis à un champ de forces surfaciques \mathbf{t} sur une partie Γ_1 de son bord,
- la partie complémentaire Γ_2 de son bord se déplace librement.

Sous l'action des forces appliquées le solide se déforme ; la déformation est définie par le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ de chaque point \mathbf{x} du solide. Nous supposerons toujours par la suite que ces déplacements sont petits. Nous ferons aussi l'hypothèse, explicitée plus loin, que le solide a un comportement élastique linéaire. Le problème est alors de déterminer la position d'équilibre du solide, définie par les déplacements de chaque point, ainsi que les efforts internes créés par la déformation du solide.

3.1.1 Grandeurs fondamentales en élasticité

Notations

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$ est un point quelconque du domaine Ω .
- $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$ est le vecteur déplacement en un point.

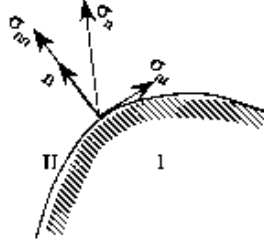


FIG. 3.1 – Représentation géométrique des contraintes

- $[\varepsilon]$ est la matrice des déformations. Pour un vecteur unitaire $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^t$, on définit la déformation normale $\varepsilon_n = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} n_i n_j$
- $[\sigma]$ est la matrice des contraintes. Pour un vecteur unitaire $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^t$, on définit le vecteur de contrainte normale σ_n de $i^{\text{ème}}$ composantes $\sum_j \sigma_{ij} n_j$.
- λ et μ sont les coefficients de Lamé, E le module de Young, ν le coefficient de Poisson.

Les contraintes

On définit sur le domaine Ω le champ de contrainte $[\sigma]$, représenté ponctuellement par la matrice symétrique $[\sigma] = \sigma_{ij}$ (les contraintes sont homogènes à des pressions et s'expriment donc, dans le système international, en Pascal). Ce champ caractérise les efforts à l'intérieur du solide, et sa signification précise découle de la propriété suivante : si l'on considère dans le solide une surface séparant le domaine en deux parties I et II (cf. figure 3.1), les efforts exercés par la partie I sur la partie II sont représentés par une densité surfacique de force qui est, en un point de normale unitaire \mathbf{n} , représentée par le vecteur σ_n de $i^{\text{ème}}$ coordonnée $\sum_j \sigma_{ij} n_j$.

Le vecteur σ_n se décompose en sa composante normale σ_{nn} (également notée σ_n) grandeur analogue à une pression dans un fluide mais de signe quelconque, et sa projection σ_{nt} (également notée τ) sur le plan tangentiel, appelée cisaillement, qui représente l'effort qui tend à faire glisser les deux parties I et II du solide l'une sur l'autre. On définit aussi usuellement la pression hydrostatique $p = \frac{\text{tr}([\sigma])}{3}$ et le déviateur des contraintes $[\sigma]_D = [\sigma] - p Id$, où $Id : \text{elast.tex}, v1.62001/10/2609 : 19 : 50vincentExp$ est la matrice identité. Il y a une difficulté majeure pour appliquer la notion de contrainte à l'étude de la déformation d'un solide. En effet, dans l'interprétation donnée ci-dessus de la définition σ_n il faut considérer une surface interne au solide déformé ; or la configuration du solide déformé n'est pas connue. Nous supposons dans ce qui suit que les déformations sont suffisamment petites pour qu'il ne soit pas nécessaire de faire une distinction, dans le calcul de σ_n , entre une surface définie dans le solide avant toute déformation et la même surface déformée.

Les déformations

Considérons dans un solide une déformation définie par le champ de déplacement $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$ de ses points. Intuitivement, il y a une déformation dans un solide au cours d'un déplacement s'il y a des changements de longueur ; pour définir précisément les changements de longueur, nous considérons, en un point quelconque du solide, un segment de longueur l orienté selon un vecteur unitaire \mathbf{n} ; si la longueur de ce segment devient après déformation $l + \delta l$, sa "déformation" est caractérisée par le taux d'allongement $\frac{\delta l}{l}$. On montre que les changements de longueur sont en fait complètement déterminés par les changements de longueurs infinitésimales, i.e. des taux d'allongement obtenus pour une longueur l qui tend vers 0. La grandeur ainsi définie, à savoir le taux d'allongement d'un segment de longueur infinitésimale dirigé selon le vecteur \mathbf{n} , est une expression quadratique par rapport aux dérivées des déplacements. Son expression est :

$$\frac{\delta l}{l} = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} n_i n_j, \quad \text{où} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (3.1)$$

On définit donc sur le domaine Ω le *champ de déformation* $[\boldsymbol{\varepsilon}]$, représenté ponctuellement par la matrice symétrique $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ dont les éléments sont définis par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (3.2)$$

Si les dérivées des déplacements sont petites devant l'unité, l'approximation linéaire de la déformation est légitime (hypothèse dite des **petites déformations**). Son expression est alors :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.3)$$

Nous supposons dans tout ce qui suit que l'hypothèse des petites déformations est vérifiée.

La déformation dans la direction \mathbf{n} , i.e $\varepsilon_{nn} = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} n_i n_j$, est appelée *déformation normale*. Si l'on considère deux segments orthogonaux de normale unitaire \mathbf{n} et \mathbf{t} , la grandeur $\varepsilon_{nt} = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} n_i t_j$ est appelée *distorsion* ; le scalaire $\gamma_{nt} = 2 \varepsilon_{nt}$ est la variation de l'angle entre ces deux segments durant la déformation ; la distorsion ε_{nt} mesure, dans le solide, le glissement dans la direction \mathbf{t} des "couches" orthogonales à \mathbf{n} . Dans la matrice de déformation, les éléments diagonaux ε_{ii} sont donc des déformations normales dans la direction des trois axes tandis que les éléments non diagonaux ε_{ij} , i.e. les distorsions, mesurent dans le solide le glissement des couches parallèles aux axes.

Notons enfin que, sous l'hypothèse des petites déformations, l'invariant $\Theta = \text{tr}([\boldsymbol{\varepsilon}]) = \text{Div}(\mathbf{u})$ mesure le taux de variation locale du volume (i.e. si un volume infinitésimal V devient dans la déformation $V + \delta V$, alors $\Theta = \frac{\delta V}{V}$).

3.1.2 Équations locales

Les équations d'équilibre

Une partie ω du solide Ω , de frontière γ , est en équilibre si la résultante des forces exercées sur ω est nulle; les forces appliquées sont les contraintes exercées par la partie complémentaire de ω sur le bord γ et le champ des forces volumiques \mathbf{f} . Compte tenu de la définition des contraintes, on a donc, pour un domaine ω ne touchant pas la frontière de Ω , la relation vectorielle suivante :

$$-\int_{\gamma} \boldsymbol{\sigma}_n \, d\gamma + \int_{\omega} \mathbf{f} \, d\omega = 0 \quad (3.4)$$

qui donne trois relations scalaires :

$$-\int_{\gamma} \sum_{i,j} \sigma_{ij} n_j \, d\gamma + \int_{\omega} f_i \, d\omega = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

L'intégrale de bord se transforme par la formule de Green en une intégrale de volume, d'où :

$$\int_{\omega} \sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, d\omega + \int_{\omega} f_i \, d\omega = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

Cette relation étant vraie pour tout domaine ω , on en déduit les équations d'équilibre intérieur :

$$\sum_{i,j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (3.7)$$

On écrit symboliquement cette équation, en notant $\text{Div}[\boldsymbol{\sigma}]$ le champ de vecteurs obtenu en calculant la divergence de chaque ligne de la matrice $[\boldsymbol{\sigma}]$

$$\text{Div}[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{f} = 0 \quad (3.8)$$

D'autre part, en un point du bord où le solide est soumis à un effort de densité surfacique \mathbf{t} , la définition des contraintes normales implique :

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{t} \quad (3.9)$$

La loi de comportement

La loi de comportement d'un matériau élastique caractérise la relation entre les contraintes, représentées par la matrice $[\boldsymbol{\sigma}]$, et les déformations, représentées par la matrice $[\boldsymbol{\varepsilon}]$. Pour un matériau à **comportement élastique linéaire** cette relation est linéaire et s'exprime donc à l'aide du tenseur des coefficients élastiques, à quatre indices variant de 1 à 3, $R_{ij\alpha\beta}$:

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha, \beta} R_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (3.10)$$

Dans le cas particulier d'un matériau isotrope, on montre que tous les coefficients de la matrice \mathbf{R} s'expriment à l'aide des deux coefficients de Lamé λ et μ et la relation entre contraintes et déformations s'écrit (en utilisant le symbole de Kronecker δ_{ij}) :

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (3.11)$$

Notons que d'après cette relation, les cisaillements σ_{ij} (pour $i \neq j$) sont directement proportionnels aux distorsions ε_{ij} : pour $i \neq j$, $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}$, tandis que la pression hydrostatique $p = \frac{1}{3} \sum_i \sigma_{ii}$ est proportionnelle à la trace des déformations : $p = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\text{tr}[\varepsilon]$ (La trace de $[\varepsilon]$, qui est aussi la divergence du champ de déplacement \mathbf{u} , mesure les variations de volume infinitésimales). À la place des coefficients de Lamé, on caractérise en général les propriétés élastiques d'un matériau isotrope par le module de Young E (homogène à une contrainte) et le coefficient de Poisson (sans dimension et compris entre 0 et $\frac{1}{2}$), reliés aux coefficients de Lamé par :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.12)$$

On peut inverser la relation entre les contraintes et les déformations :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \quad (3.13)$$

Si l'on remarque que $\text{tr}([\varepsilon]) = \frac{1-2\nu}{E} \text{tr}([\sigma])$, on voit que pour $\nu = \frac{1}{2}$, on a $\text{tr}([\varepsilon]) = 0$, ce qui signifie que le solide est incompressible. Les solides incompressibles, ou quasiment incompressibles, exigent une mise en équation particulière, puisque le coefficient de Lamé λ devient infini; nous laisserons ce cas de côté dans la suite de ce travail.

Formulation mathématique du problème type de l'élasticité

Pour résoudre le problème type défini en introduction, il faut donc trouver :

- un champ de déplacement \mathbf{u} sur le domaine Ω , et le champ de déformation $[\varepsilon]$ qui lui est associé,
- un champ de contrainte $[\sigma]$ sur le domaine Ω ,

qui vérifient :

- les équations d'équilibre à l'intérieur (3.8) et sur le bord (3.9),
- la loi de comportement (3.10),
- les conditions imposées au déplacement par les fixations.

On peut, dans les équations d'équilibre, éliminer les contraintes en utilisant la loi de comportement, puis éliminer les déformations grâce à leur expression en fonction des déplacements; on obtient, dans le cas d'un matériau homogène isotrope, le système suivant de trois équations aux dérivées partielles :

$$-(\lambda + \mu) \text{Grad}(\text{Div}(\mathbf{u})) - 2\mu \text{Div}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (3.14)$$

À ce système il faut ajouter les conditions aux limites obtenues en exprimant que :

- le bord Γ_0 est fixe : $\mathbf{u} = \vec{0}$,
- le bord Γ_1 est soumis à une force surfacique : $\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{t}$,
- le bord Γ_2 est libre : $\boldsymbol{\sigma}_n = \vec{0}$.

Les conditions de bord libre ou de pression imposées se traduisent, après remplacement des contraintes par les déformations, par une condition sur les dérivées premières des déplacements.

3.1.3 Principe du minimum de l'énergie potentielle

On peut établir, à partir des équations d'équilibre, une *formulation faible*¹ : c'est le *principe des travaux virtuels*. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de mécanique [Cia86] pour la démonstration de ce principe qui s'énonce ainsi :

Principe des travaux virtuels

Considérons un solide fixé sur une partie Γ_0 de son bord et subissant une déformation définie par le champ de déplacement \mathbf{u} . Soit $[\boldsymbol{\sigma}](\mathbf{u})$ le champ de contraintes sur ce solide, soit \mathbf{f} un champ de force volumique et \mathbf{t} un champ de force surfacique appliqué sur une partie Γ_1 du bord. Le solide est en équilibre si et seulement si le champ $[\boldsymbol{\sigma}]$ vérifie la relation :

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_1 \quad (3.15)$$

pour tout champ de déplacement \mathbf{v} cinématiquement admissible (i.e. respectant les conditions imposées au solide). Le second membre de (3.15) représente le travail des forces externes, tandis que le premier membre peut s'interpréter comme le travail des efforts internes. On peut montrer que le principe des travaux virtuels est équivalent à un principe variationnel : le *principe du minimum de l'énergie*.

Principe du minimum de l'énergie

La position d'équilibre \mathbf{u} du solide réalise le minimum de la fonction *énergie potentielle totale* J :

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij}(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma_1 \quad (3.16)$$

Le premier terme de l'énergie potentielle totale est l'*énergie élastique*, que nous noterons E_{elast} :

$$E_{elast}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (3.17)$$

¹*formulation faible* : qui ne requiert pas l'existence des dérivées secondes du déplacement, au contraire des équations locales.

3.1.4 Notation vectorielle des déformations et contraintes

Les notations matricielles utilisées jusqu'à présent pour représenter les déformations et les contraintes peuvent être remplacées par des notations vectorielles qui allègent considérablement l'écriture. On représente les contraintes et les déformations par deux vecteurs à 6 composantes (tenant compte de la symétrie des matrices) :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31})^t \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31})^t \quad (3.19)$$

La loi de comportement (3.10) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.20)$$

où \mathbf{R} est la matrice des coefficients élastiques, matrice carrée de dimension 6, dont on montre qu'elle est symétrique définie positive. Dans le cas d'un matériau isotrope, la matrice \mathbf{R} vaut :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

On définit également un opérateur matriciel linéaire \mathbf{S} pour exprimer de manière matricielle la relation (3.2) entre les déformations et le vecteur de déplacement :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

En utilisant ces notations, la relation entre contraintes et déformations est

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{u} \quad (3.23)$$

L'énergie potentielle totale (3.16) et l'énergie élastique (3.17) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{v})^t \mathbf{S}\mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$E_{elast}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{v})^t \mathbf{S}\mathbf{v} \, d\Omega \quad (3.25)$$

3.2 Résolution du problème d'élasticité par la méthode des éléments finis (MEF)

Il n'est possible de trouver une solution exacte aux équations d'équilibre (3.14) ou au problème de minimisation de l'énergie potentielle totale J (3.16) que dans des cas très particuliers (solides à géométrie très simple, etc.). On cherche donc en général une solution approchée dans un espace de fonctions particulier, appelé *espace d'approximation*. Cet espace est un sous-espace de l'espace auquel appartient la solution exacte et il possède la propriété d'être de dimension finie, de manière à permettre une résolution numérique. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de rechercher une solution au problème de minimisation de l'énergie potentielle totale J en utilisant une méthode d'approximation, la Méthode des Éléments Finis (MEF). Nous présentons tout d'abord la méthode générale de recherche de la meilleure approximation dans un espace donné (Méthode de Ritz) et nous étudions ensuite le cas particulier de la MEF.

3.2.1 Méthode de Ritz

Soit $\tilde{\mathbf{u}}$ une approximation du champ de déplacement \mathbf{u} . Nous recherchons $\tilde{\mathbf{u}}$ dans l'espace engendré par les M fonctions de base $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq M}$, définies sur le domaine Ω , ce qui veut dire que $\tilde{\mathbf{u}}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces fonctions :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \tilde{u}_i \Phi_i(\mathbf{x}) \quad (3.26)$$

Les coefficients \tilde{u}_i sont les paramètres de l'approximation. Le choix des fonctions de base ainsi que la dimension de la base fonctionnelle sont évidemment déterminants pour la qualité de l'approximation. Nous reviendrons sur ce problème un peu plus loin.

L'énergie potentielle totale (3.24) devient, en utilisant l'approximation $\tilde{\mathbf{u}}$, une fonction des coefficients \tilde{u}_i :

$$\begin{aligned} J(\tilde{\mathbf{u}}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{RS} \sum_{i=1}^M \tilde{u}_i \Phi_i(\mathbf{x}))^t \mathbf{S} (\sum_{i=1}^M \tilde{u}_i \Phi_i(\mathbf{x})) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \sum_{i=1}^M \tilde{u}_i \Phi_i(\mathbf{x}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} \mathbf{t} \cdot \sum_{i=1}^M \tilde{u}_i \Phi_i(\mathbf{x}) \, d\Gamma_1 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \tilde{u}_i \tilde{u}_j \int_{\Omega} (\mathbf{RS} \Phi_i(\mathbf{x}))^t \mathbf{S} \Phi_j(\mathbf{x}) \, d\Omega \\ &\quad - \sum_{i=1}^M \tilde{u}_i \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Phi_i(\mathbf{x}) \, d\Omega - \sum_{i=1}^M \tilde{u}_i \int_{\Gamma_1} \mathbf{t} \cdot \Phi_i(\mathbf{x}) \, d\Gamma_1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

On définit la matrice \mathbf{K} , appelée *matrice de raideur*, de dimensions $M * M$, telle que :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\mathbf{RS} \Phi_i(\mathbf{x}))^t \mathbf{S} \Phi_j(\mathbf{x}) \, d\Omega, \quad (3.28)$$

le vecteur \mathbf{F} , appelé *vecteur des forces*, de dimension M , dont la i ème composante est :

$$F_i = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \Phi_i(\mathbf{x}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathbf{t} \cdot \Phi_i(\mathbf{x}) \, d\Gamma_1, \quad (3.29)$$

et le vecteur \mathbf{U} , appelé *vecteur des déplacements* de dimension M :

$$\mathbf{U} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_i, \dots, \tilde{u}_M)^t \quad (3.30)$$

L'énergie potentielle vaut alors :

$$J(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^t \mathbf{F} \quad (3.31)$$

Le minimum de l'énergie potentielle totale J est obtenu en résolvant le système de M équations :

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{u}_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq M \quad (3.32)$$

qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (3.33)$$

3.2.2 Choix des fonctions de base

Pour que des fonctions de base assurent une approximation de bonne qualité, elles doivent posséder un certain nombre de propriétés. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages spécialisés [Imb79, ZT71] pour l'étude exhaustive de celles-ci. Retenons simplement ces deux propriétés importantes :

- les fonctions de base doivent satisfaire les conditions de continuité requises par le problème, conditions qui dépendent essentiellement de l'ordre de la fonctionnelle (ex : une fonctionnelle avec dérivées d'ordre 1 requiert des fonctions de base continues (pour que la solution soit continue) et dérivables (pour pouvoir évaluer la fonctionnelle)).
- les fonctions de base doivent satisfaire “les conditions aux limites rigides” du problème variationnel (ex : condition de déplacement nul sur une partie du domaine).

D'une manière générale, on peut dire que pour des problèmes particuliers, c'est-à-dire présentant un domaine à géométrie très simple, on dispose d'un certain choix pour les fonctions de base : fonctions trigonométriques, fonctions polynômiales, etc. Cependant, dès que la géométrie du domaine se complexifie, il devient vite difficile d'imposer à ces fonctions qu'elles satisfassent la deuxième contrainte. C'est pour résoudre cette difficulté que la MEF a été introduite : elle repose en effet sur l'utilisation de fonctions de base à support réduit (i.e. une petite portion du domaine), propriété leur permettant de s'adapter à des géométries complexes.

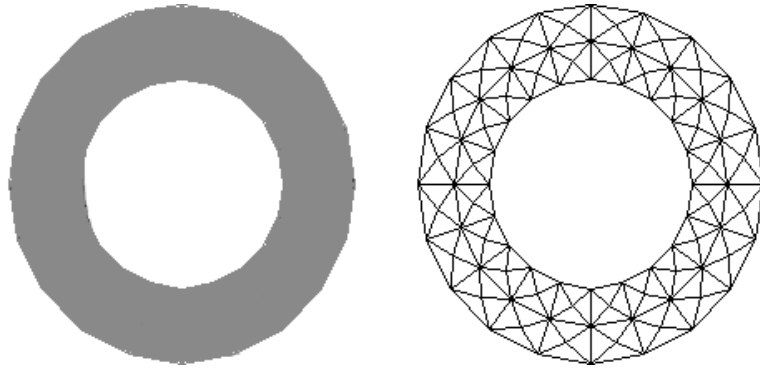


FIG. 3.2 – Objet 2D (à gauche) et un maillage en triangle de cet objet (à droite).

3.2.3 Méthode des Éléments finis

La MEF utilise un maillage de l'objet en sous-domaines à géométrie simple, appelés *éléments finis*. Les éléments finis les plus simples (et les plus utilisés) sont, en 2D, le triangle et le quadrilatère et en 3D, le tétraèdre et le parallélépipède. La figure 3.2 montre un exemple de maillage 2D.

A partir de ce maillage, on définit des fonctions de base. Nous avons vu que pour résoudre un problème d'élasticité, il faut disposer de fonctions vectorielles. Celles-ci se déduisent en fait simplement de fonctions de base scalaires. Ces dernières sont des fonctions polynômiales par morceaux. Nous nous plaçons dans le cas le plus simple, celui des fonctions de base affines par morceaux construites sur un maillage 3D en tétraèdres.

On suppose que le maillage est composé de M noeuds (ou sommets). A chaque noeud i , on associe une fonction de base ϕ_i qui possède les propriétés suivantes :

- ϕ_i vaut 1 au noeud i
- ϕ_i vaut 0 à tous les autres noeuds du maillage.
- la restriction de ϕ_i à un élément est une fonction affine

La figure 3.3 montre un exemple de fonction de base 2D, plus facile à représenter qu'une fonction de base 3D.

Ces M fonctions constituent une base de l'espace des fonctions continues affines par morceaux, où les morceaux sont les éléments du maillage. Nous notons W cet espace fonctionnel. Ces fonctions continues affines par morceaux sont en fait complètement déterminées par les valeurs qu'elles prennent aux noeuds du maillage. Les fonctions de base permettent de calculer la valeur de l'une de ces fonctions en tout point du domaine par une interpolation.

Des trois propriétés énoncées précédemment, on peut déduire que chaque fonction de base ϕ_i est nulle sur tout le domaine sauf sur les éléments dont le noeud i est un sommet. Par ailleurs, sur un élément donné, seules les trois fonctions liées à ses sommets sont non nulles. D'où la conclusion -assez évidente, que la valeur sur un élément donné, d'une fonction appartenant à W est complètement déterminée par la valeur de cette fonction

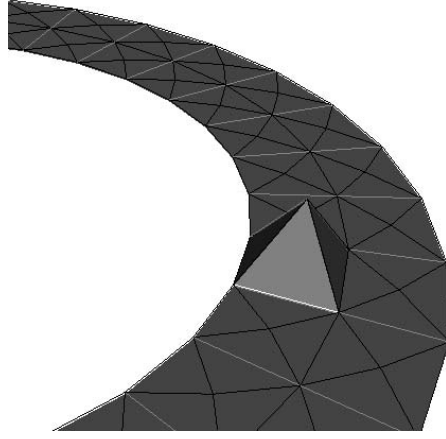


FIG. 3.3 – Fonction de base affine par morceaux associée à un noeud du maillage 2D de la figure 3.2.

aux sommets de cet élément.

Pour obtenir les fonctions de base vectorielles nécessaires à l'approximation du déplacement \mathbf{u} , nous décomposons chacune des coordonnées de \mathbf{u} sur la base scalaire, soit, en 3D :

$$u_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \tilde{u}_{3i-2} \phi_i(\mathbf{x}) \quad (3.34)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \tilde{u}_{3i-1} \phi_i(\mathbf{x}) \quad (3.35)$$

$$u_3(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M \tilde{u}_{3i} \phi_i(\mathbf{x}) \quad (3.36)$$

On définit les fonctions vectorielles $(\Phi_k)_{1 \leq k \leq 3M}$:

$$\Phi_{3i-2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi_i(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_{3i-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_i(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Phi_{3i}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Ces fonctions constituent une base de l'espace des fonctions vectorielles dont les composantes appartiennent à W . Nous notons V cet espace de fonctions vectorielles qui est l'espace d'approximation. Nous recherchons une approximation du déplacement dans cet espace :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3M} \tilde{u}_i \Phi_i(\mathbf{x}) \quad (3.38)$$

Les fonctions de base étant définies, nous pouvons déterminer l'équation matricielle $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ (3.33) qui permet de calculer les coefficients \tilde{u}_i . Les propriétés des fonctions de base utilisées pour la MEF permettent de mettre en oeuvre un algorithme efficace pour le calcul de la matrice de raideur. Nous donnons ci-après les grandes lignes de cet algorithme.

Calcul de \mathbf{K} par la MEF (éléments tétraédriques linéaires)

D'après (3.28) la matrice de raideur a pour expression :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\mathbf{R}\mathbf{S}\Phi_i(\mathbf{x}))^t \mathbf{S}\Phi_j(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.39)$$

Le calcul de cette matrice est effectué en utilisant le *principe de superposition*. Supposons que l'on découpe, en respectant le maillage, le domaine Ω en deux parties Ω_1 et Ω_2 , comportant respectivement N_1 et N_2 noeuds (on dit que ces deux parties sont des *sous-domaines*). Les coefficients de la matrice de raideur \mathbf{K} sont des intégrales sur le domaine Ω . En remplaçant dans chaque intégrale le domaine Ω par sa restriction sur chacun des sous-domaines Ω_1 et Ω_2 , on définit les matrices $\hat{\mathbf{K}}_1$ et $\hat{\mathbf{K}}_2$. La matrice \mathbf{K} vérifie, du fait de l'additivité des intégrales par rapport à l'union des domaines, un principe de superposition :

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}_1 + \hat{\mathbf{K}}_2 \quad (3.40)$$

La matrice $\hat{\mathbf{K}}_1$ a de nombreuses lignes et colonnes nulles, correspondant aux noeuds qui n'appartiennent pas au sous-domaine Ω_1 . C'est pourquoi on définit sur Ω_1 une *numérotation locale* des noeuds de 1 à N_1 , où N_1 est le nombre de noeuds appartenant au domaine Ω_1 . Puis on construit la matrice \mathbf{K}_1 extraite de $\hat{\mathbf{K}}_1$ en ne conservant que les lignes et les colonnes appartenant au sous-domaine. Cette matrice est exactement la matrice de raideur du sous-domaine Ω_1 . En procédant de même pour Ω_2 , on obtient la matrice de raideur \mathbf{K}_2 . Le principe de superposition consiste à utiliser la stratégie inverse : à partir de la matrice de raideur \mathbf{K}_i d'un sous-domaine Ω_i dont les noeuds sont numérotés de 1 à N_i , on construit par "éclatement" lié à une renumérotation des noeuds une matrice $\hat{\mathbf{K}}_i$ de dimension $3N * 3N$. La matrice de raideur du domaine complet Ω est alors la somme des matrices $\hat{\mathbf{K}}_i$. Le principe de superposition est illustré par la figure 3.4.

Le principe de superposition est valable quels que soient le nombre et la forme des sous-domaines. Lorsque les sous-domaines sont les éléments du maillage (triangle, tétraèdre...), les matrices de raideur sont appelées *matrices de raideur élémentaire*. En pratique, le calcul de la matrice de raideur \mathbf{K} du domaine complet est effectué par superposition des matrices élémentaires de chaque élément du domaine.

Calcul de la matrice de raideur d'un élément tétraédrique

On considère un élément tétraédrique Ω_e , dont la numérotation locale des noeuds est (1,2,3,4). Pour calculer sa matrice de raideur élémentaire, nous introduisons les notations suivantes :

- Φ_{3i-2} , Φ_{3i-1} et Φ_{3i} sont les fonctions de base associées au noeud i ($i = 1, \dots, 4$).
- $(\tilde{u}_{3i-2}, \tilde{u}_{3i-1}, \tilde{u}_{3i})^t$ est le déplacement du noeud i .
- $(X(i), Y(i), Z(i))^t$ est le vecteur des coordonnées initiales du noeud i .

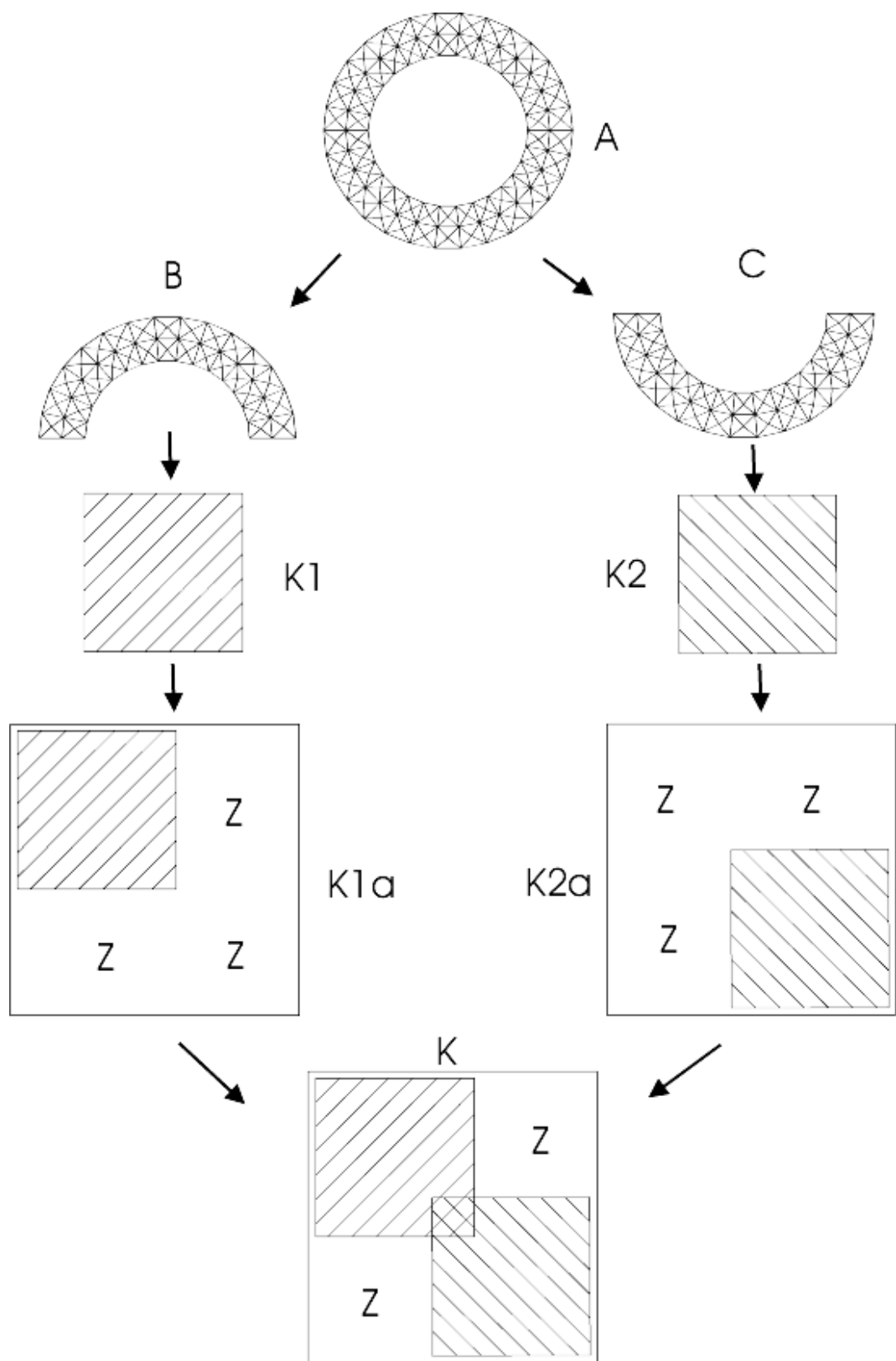


FIG. 3.4 – Principe de superposition pour le calcul de la matrice de raideur d'un domaine.

Compte-tenu de ces notations, le champ de déplacement sur le tétraèdre s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{12} \tilde{u}_i \Phi_i(\mathbf{x}) \quad (3.41)$$

La matrice de raideur élémentaire, notée \mathbf{K}^e , est de dimension 12*12 (4 noeuds et 3 coordonnées par noeud) et ses coefficients sont définis par :

$$\mathbf{K}_{lm}^e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{R} \mathbf{S} \Phi_l(\mathbf{x}))^t \mathbf{S} \Phi_m(\mathbf{x}) d\Omega_e \quad (3.42)$$

Comme les trois fonctions de base associées au noeud i sont construites avec la même fonction scalaire ϕ_i (cf. 3.37), le champ de déplacement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^4 \phi_j(\mathbf{x}) \tilde{u}_{3i-2} \\ \sum_{j=1}^4 \phi_j(\mathbf{x}) \tilde{u}_{3i-1} \\ \sum_{j=1}^4 \phi_j(\mathbf{x}) \tilde{u}_{3i} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Pour calculer les fonctions ϕ_j , nous définissons la matrice \mathbf{P} à partir des coordonnées $(X(i), Y(i), Z(i))^t$ du noeud i :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} X(1) & Y(1) & Z(1) & 1 \\ X(2) & Y(2) & Z(2) & 1 \\ X(3) & Y(3) & Z(3) & 1 \\ X(4) & Y(4) & Z(4) & 1 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

On peut alors montrer les relations suivantes :

$$\phi_j(\mathbf{x}) = M_{j1} * x + M_{j2} * y + M_{j3} * z + M_{j4} \quad (3.45)$$

avec $\mathbf{M} = \mathbf{P}^{-1}$.

On définit la matrice \mathbf{B}_j :

$$\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} M_{j1} & 0 & 0 \\ 0 & M_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & M_{j3} \\ M_{j2} & M_{j1} & 0 \\ 0 & M_{j3} & M_{j2} \\ M_{j3} & 0 & M_{j1} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

et la matrice \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

La matrice de raideur élémentaire a alors pour expression :

$$\mathbf{K}^e = V \mathbf{B}^t \mathbf{S} \mathbf{B} \quad (3.48)$$

où V est le volume de l'élément ($V = \frac{1}{6} \text{Det}(P)$).

3.3 Analyse Modale

Nous avons obtenu précédemment l'équation $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ qui permet de déterminer la position d'équilibre de l'objet dans un problème statique. Soit \mathbf{P} une matrice de changement de repère, c'est-à-dire une matrice orthonormée de même dimension que \mathbf{K} . Dans le nouveau repère, le système $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ devient

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (3.49)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{P} \quad \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U} \quad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{F} \quad (3.50)$$

La matrice \mathbf{K} étant symétrique semi-définie positive, elle est diagonalisable. Si l'on prend :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \dots & \mathbf{V}_M \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

où les \mathbf{V}_i sont les vecteurs propres (appelés aussi *modes propres*) de \mathbf{K} , c'est-à-dire vérifiant :

$$\mathbf{K}\mathbf{V}_i = \lambda_i \mathbf{V}_i \quad \text{avec} \quad |\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}| \quad (3.52)$$

alors la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ est diagonale. Les composantes de $\tilde{\mathbf{U}}$ sont les coordonnées du vecteur de déplacement \mathbf{U} dans la base de vecteurs propres.

Quelques propriétés des modes propres

Pour un objet n'ayant aucun nœud fixe, les 6 premiers modes ont une valeur propre nulle, et correspondent aux 6 degrés de liberté du mouvement rigide d'un objet en 3D (3 degrés en translation, 3 en rotation). L'énergie élastique associée à un mouvement composé uniquement de ces 6 modes rigides sera nulle, ce qui est conforme à l'intuition.

Par ailleurs, par définition des valeurs et vecteurs propres, nous avons :

$$E_{elast}(\mathbf{V}_i) = \frac{\lambda_i}{2} \leq E_{elast}(\mathbf{V}_{i+1}) = \frac{\lambda_{i+1}}{2} \quad (3.53)$$

La base des vecteurs propres de \mathbf{K} permet donc une décomposition hiérarchique du vecteur de déplacement \mathbf{U} , optimale au sens de l'énergie élastique.

D'un point de vue spatial, plus le rang d'un mode propre est élevé, plus la forme de l'objet déformé par ce mode contiendra des hautes fréquences spatiales : des nœuds voisins auront de plus en plus des mouvements contraires. C'est pourquoi les derniers modes sont appelés modes "hautes fréquences". A l'inverse, les premiers modes sont les modes "basses fréquences". La figure 3.5 montre quelques mode basses fréquences d'un maillage 3D.

Il est important de noter que, d'un point de vue qualitatif, les modes "basses fréquences" sont peu sensibles à la finesse du maillage ou à la position des nœuds. Ces modes sont en effet déterminés par la forme de l'objet. Cette propriété est à la base de travaux de mise en correspondance [SP95a, BRW98].

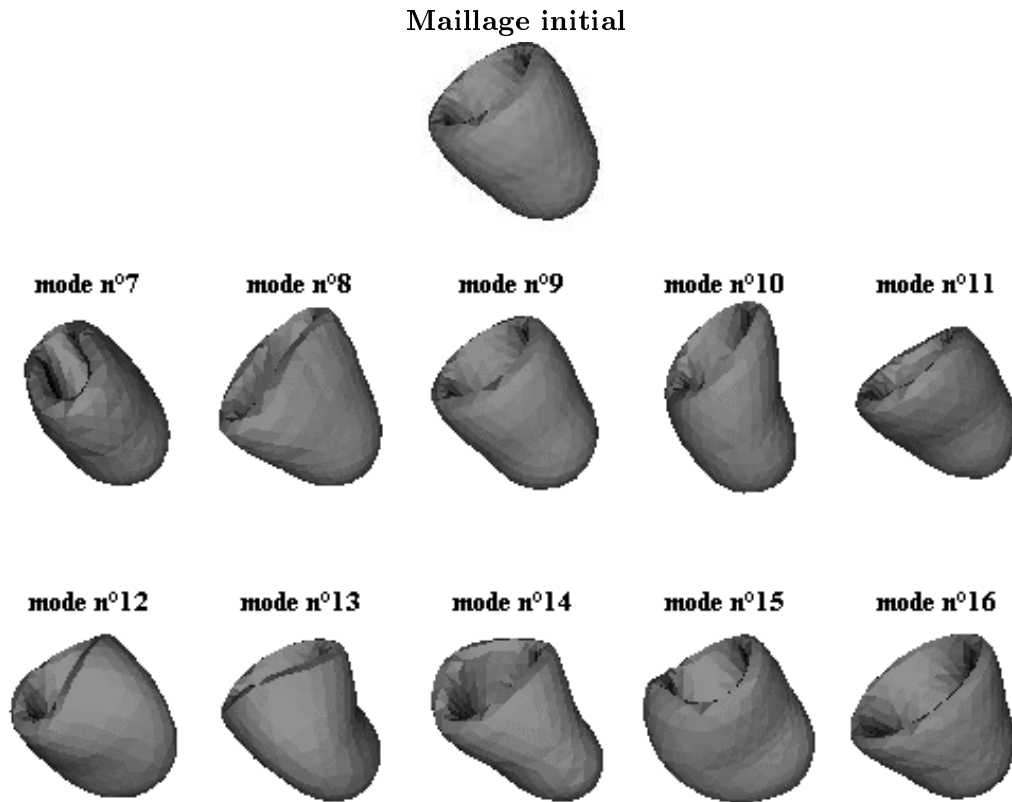


FIG. 3.5 – Quelques modes propres “basses fréquences” d’un maillage (modèle de ventricule gauche de coeur). Les 6 premiers modes, correspondant à des déformations rigides, ne sont pas représentés.

3.4 Utilisation de la théorie de l'élasticité en traitement d'images

La théorie de l'élasticité est abondamment utilisée en traitement d'images, notamment pour des applications de recalage ou d'estimation de mouvement. Pour ce type d'applications, l'élasticité joue un rôle de régularisation. Dans d'autres applications, l'élasticité est utilisée, par l'intermédiaire de l'analyse modale, pour son aptitude à fournir une représentation hiérarchisée des déformations d'un objet. Enfin, une troisième classe d'applications utilise l'élasticité pour modéliser le comportement mécanique de certains organes. Nous évoquons successivement ces trois types d'applications :

3.4.1 Régularisation par élasticité

Le travail pionnier a été celui de Bajcsy [BK89] (approfondi ensuite dans [GHRB94, GHLBB97, Gee99]). Bowden [BRW98], propose une variante où l'atlas est une image originale segmentée, image choisie parmi toutes les images à segmenter (et issue de la même modalité d'imagerie). La segmentation est alors obtenue par recalage élastique intramodalité.

Dans les travaux cités ci-dessus, l'élasticité est utilisée pour régulariser un champ de déplacement en assurant un contrepoids à une fonction de similarité. On peut dire que la fonction de similarité génère la déformation, tandis que les propriétés d'élasticité l'orientent vers un résultat conforme aux attentes (préservation de la forme générale, etc.).

Une variante de ce principe de régularisation consiste à utiliser l'élasticité comme critère pour interpoler des contraintes dispersées sur le champ de déplacement [PSR⁺98]. Dans [MPSK98], l'objectif de l'étude est de mesurer les variations de la forme de certains organes du cerveau, tout en éliminant la composante de cette variation qui est due uniquement à la forme du crâne et qui n'est donc pas significative d'un point de vue pathologique. Les données sont donc recalées par rapport à un modèle standard de crâne, de manière à superposer les surfaces crâniennes. Il faut ensuite répercuter la déformation sur les organes du cerveau. Pour ce faire, le cerveau est assimilé à un matériau élastique et l'application de contraintes de déplacement à sa surface génère automatiquement un champ dense de déplacement sur tout le cerveau.

3.4.2 Modes élastiques

De nombreux travaux utilisent l'analyse modale (voir section 3.3 pour les principes de l'analyse modale) pour son aptitude à fournir une description hiérarchisée des déformations d'un objet. L'analyse modale d'un objet élastique représenté par un maillage en éléments finis permet d'obtenir un ensemble de directions de déformations (la base modale) classées approximativement en terme de fréquences spatiales. Ainsi, les modes "basses fréquences" sont tels que deux noeuds voisins dans la géométrie/topologie du maillage auront des

déplacements de direction et d'amplitude proches. Le contraire se produit pour les modes "hautes fréquences". La suppression des modes basses fréquences permet d'éliminer des déformations qui, a priori, ne sont pas réalistes dans le cadre de l'application traitée, tout en réduisant la complexité de calcul [PS91, PH91, MPSK98, CT95, SP95b].

3.4.3 Modèle biomécanique de l'organe imagé

Dans les application précédentes, l'élasticité joue essentiellement un rôle mathématique, dans le sens où l'on ne cherche pas à la relier au comportement mécanique de l'objet imagé. Des travaux récents utilisent cependant des modèles biomécaniques élastiques pour prédire le comportement mécanique d'organes.

Ainsi, dans [KDZB99], l'impact de la croissance d'une tumeur en terme de déformation de des organes du cerveau est simulé grâce à un modèle biomécanique. Par un processus inverse, la forme pré-tumorale de ces organes peut être alors estimée, ce qui permet ensuite d'effectuer un recalage élastique vers un atlas de cerveau .

Dans [HRS⁺99], un modèle biomécanique élastique du cerveau permet de simuler les déformations que produiront les gestes chirurgicaux sur les différents organes. Cette simulation permet d'améliorer le recalage entre les images pré-opératoires et intra-opératoires

3.4.4 Élasticité et imagerie cardiaque

Nous traitons à part l'imagerie cardiaque puisqu'elle est l'application visée dans ce travail de thèse.

Quelques travaux s'appuient sur un modèle de myocarde élastique dynamique pour reconstruire le champ de déplacement du myocarde. Les données de l'imagerie sont pré-traitées pour en extraire des informations qui contraignent la déformation du modèle. Plusieurs types d'information sont utilisés :

- les points des interfaces et les points de marquage tissulaire en IRM [HMA00],
- les points des interfaces et une information de vitesse au milieu de la paroi (IRM à contraste de phase) [DSCS98]
- un champ de déplacement aux interfaces. Ce champ est obtenu par mise en correspondance, selon un critère de courbure, de surfaces segmentées [PSDD01]. Notons dans ce cas, l'utilisation d'un modèle élastique non isotrope, prenant en compte l'orientation des fibres du myocarde.

Notons toutefois, qu'à la différence des organes du cerveau, le myocarde ne peut être modélisé de manière réaliste par un matériau élastique passif, compte tenu de sa capacité à se contracter. L'utilisation de l'élasticité dans les méthode sus-citées, et dans les travaux présentés dans ce mémoire relève plus du principe de la régularisation évoqué précédemment.

Dans [SCD⁺01], un modèle mécanique du coeur (élasticité anisotrope linéaire) couplé à un modèle électrique de la propagation de l'onde d'activation est utilisé pour la segmen-

tation d'images échographiques. Les propriétés élastiques du myocarde ne sont pas figées pendant le cycle cardiaque, mais sont directement déduites de l'état d'activation. C'est à notre connaissance le modèle le plus réaliste qui ait été utilisé pour un processus de segmentation.

Chapitre 4

Gabarit élastique

Dans ce chapitre nous exposons les principes du gabarit déformable que nous avons élaboré pour la segmentation et le suivi en IRM cardiaque conventionnelle [VCCM99]. Ce gabarit repose sur l'utilisation de l'énergie élastique comme énergie interne, et nous l'avons appelé *Gabarit Élastique* (GE). Après avoir présenté les principes de base du gabarit élastique, nous introduisons une amélioration majeure par l'adjonction d'un terme de régularisation des interfaces du modèle. Une extension de ce gabarit en vue d'une application à l'IRM de marquage tissulaire, et plus généralement au suivi d'un objet à texture, est exposée au chapitre 6.

4.1 Principes du gabarit élastique (GE)

Nous présentons le gabarit élastique destiné à mettre en correspondance les interfaces d'un objet de référence avec les informations contenues dans les données. Conformément aux principes du gabarit déformable, le GE est constitué d'un modèle géométrique de l'objet étudié et d'une fonctionnelle d'énergie.

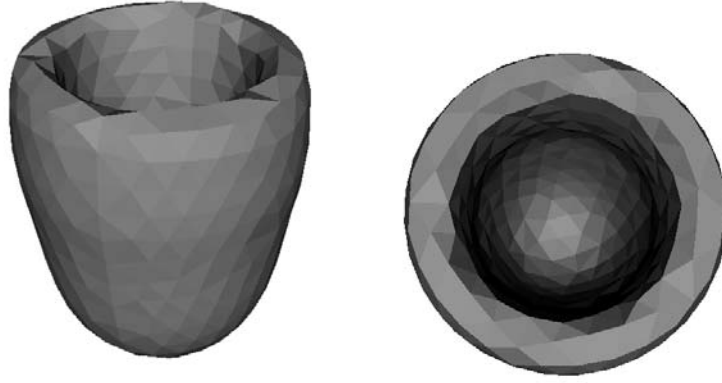


FIG. 4.1 – Maillage 3D

Notations

- Ω : région de l'espace occupée par le modèle non déformé, c'est-à-dire dans la configuration de référence.
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$: position d'un point matériel du modèle dans la configuration de référence ($\mathbf{x} \in \Omega$).
- $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), u_3(\mathbf{x}))$: vecteur déplacement.
- $\mathbf{x}'(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$: position d'un point matériel dans la configuration déformée.
- Γ : surface du modèle non déformé.
- Γ' : surface du modèle déformé.
- $\boldsymbol{\gamma}(s, t) = [\gamma_1(s, t), \gamma_2(s, t), \gamma_3(s, t)]$: équation paramétrique de Γ .
- $\boldsymbol{\gamma}'(s, t) = [\gamma_1(s, t) + u_1(\gamma_1(s, t)), \dots]$: équation paramétrique de Γ' .
- \mathcal{V} : maillage de la région Ω .
- \mathcal{V}' : maillage déformé.
- \mathbf{U} : vecteur de déplacement des noeuds du maillage (approximation discrète de \mathbf{u}).

4.1.1 Modèle géométrique

Il est constitué d'une région connexe de l'espace Ω , délimitée par ses interfaces Γ .

Afin de pouvoir utiliser ce modèle de manière numérique (et notamment pour la MEF), nous utilisons un maillage de cette région. Nous travaillons en 3D sur des maillages de tétraèdres et en 2D sur des maillages de triangles. La figure 4.1 montre un maillage de notre modèle 3D de ventricule gauche de coeur. La procédure de construction de ce maillage est exposée au chapitre 5.

4.1.2 Fonctionnelle d'énergie

Nous utilisons l'énergie élastique E_{elast} comme énergie interne (cf. équation (3.24)). Rappelons que l'énergie élastique est définie comme l'intégrale sur le domaine du modèle

du produit contrainte-déformation. L'énergie externe est quant à elle définie de manière classique comme étant l'intégrale sur la frontière du modèle d'un champ de potentiel P construit à partir des données (cf. chapitre 5). L'énergie E du GE est donc définie par :

$$E(\mathbf{u}) = E_i(\mathbf{u}) + \lambda E_e(\mathbf{u}) \quad (4.1)$$

$$\text{avec } E_i(\mathbf{u}) = E_{elast}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (4.2)$$

$$\text{et } E_e(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma'} P \, d\Gamma' \quad (4.3)$$

Notons que l'énergie externe du modèle déformé est calculée par l'intermédiaire d'une intégrale de surface dans la configuration déformée (intégrale sur Γ' et non Γ), ce qui introduit une dépendance implicite envers le champ de déplacement. La fonctionnelle E n'est donc plus quadratique comme l'était la fonctionnelle du problème type étudié au chapitre précédent (cf. équation (3.24)), ce qui a pour effet d'imposer une minimisation par méthode itérative.

4.1.3 Minimisation de la fonctionnelle d'énergie

Nous utilisons la MEF pour discrétiser le problème. Nous nous ramenons au problème type décrit au chapitre précédent en utilisant la dualité entre champ de potentiel et champ de force conservatif. Ainsi, le potentiel P traduit l'effet sur l'objet d'un champ de force surfacique \mathbf{t} défini par :

$$\mathbf{t} = -\text{Grad}(P) \quad (4.4)$$

La position d'équilibre de l'objet (ou de sa version discrète) vérifie donc l'équation $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ (cf. 3.33), qui traduit l'égalité des forces élastiques internes et des forces externes appliquées sur l'objet.

Mais comme nous l'avons signalé, l'intensité locale de la force de surface dépend de la déformation de l'objet. Le vecteur \mathbf{F} est donc une fonction de \mathbf{U} , et nous le noterons plus justement $\mathbf{F}(\mathbf{U})$. Contrairement au problème type du chapitre précédent, nous sommes donc confrontés à une équation non linéaire :

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) \quad (4.5)$$

[Mon99] expose les différentes techniques de résolution de ce type d'équation. Nous avons choisi de construire un problème évolutif Lagrangien où le déplacement est une fonction du temps t et satisfait l'équation :

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{KU}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{U}(t)) \quad (4.6)$$

Lorsque le déplacement converge, la dérivée temporelle s'annule et l'on retrouve l'équation d'équilibre (4.5).

L'équation (4.6) est discrétisée par rapport à la variable temporelle selon un schéma d'Euler semi-implicite [Cur93], en utilisant l'approximation aux différences finies :

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k}{\Delta t} \quad (4.7)$$

où Δt est le pas de temps. Cela donne :

$$\frac{\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k}{\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_k) \quad (4.8)$$

Nous obtenons l'expression de \mathbf{U}_{k+1} :

$$\mathbf{U}_{k+1} = (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{K})^{-1}(\Delta t \mathbf{F}(\mathbf{U}_k) + \mathbf{U}_k) \quad (4.9)$$

4.1.4 Réduction modale

On peut très facilement limiter le nombre de degrés de liberté du modèle à certains modes de déformation. Soit $\mathbf{P} = (\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_k)$ la matrice composée des k modes sélectionnés (k vecteurs de norme égale à 1), dont on suppose qu'ils sont 2 à 2 orthogonaux. Soit \mathbf{b} les coordonnées modales. Le déplacement des noeuds s'obtient par la relation $\mathbf{U} = \mathbf{P}\mathbf{b}$, d'où, par substitution dans l'égalité (4.6) :

$$\frac{d\mathbf{P}\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{b}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{P}\mathbf{b}(t)) \quad (4.10)$$

En multipliant à gauche par \mathbf{P}^t , et en utilisant la propriétés d'orthogonalité des modes ($\mathbf{P}^t\mathbf{P} = \mathbf{I}$), on obtient l'équation d'évolution du vecteur des coordonnées modales :

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} + \mathbf{P}^t\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{b}(t) = \mathbf{P}^t\mathbf{F}(\mathbf{P}\mathbf{b}(t)) \quad (4.11)$$

On peut par exemple effectuer un recalage rigide en choisissant :

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \quad (4.12)$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \quad (4.13)$$

$$\mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \quad (4.14)$$

Ces trois vecteurs correspondent à une translation du maillage selon chacun des axes du repère. Le vecteur $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$ est donc le vecteur de la translation appliquée au maillage.

Avec ce choix de modes, l'équation d'évolution (4.11) peut être simplifiée, puisque ces modes sont des modes propres de \mathbf{K} avec une valeur propre nulle (modes rigides), ce qui implique : $\mathbf{P}^t\mathbf{K}\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Par ailleurs, le produit $\mathbf{P}^t\mathbf{F}$, de dimension 3, est la résultante des forces nodales appliquées à l'objet (c'est-à-dire la somme des forces nodales). En notant $\mathbf{P}^t\mathbf{F} = (\Sigma f_1, \Sigma f_2, \Sigma f_3)^t$, l'équation d'évolution (4.11) est équivalente au système de trois équations :

$$\frac{db_i}{dt} = \Sigma f_i(\mathbf{b}) \quad , \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (4.15)$$

Cette équation d'évolution va guider le maillage vers une position où la résultante des forces est nulle.

4.1.5 Condensation de la matrice de raideur

Dans le modèle que nous avons présenté, les noeuds internes du maillage ne sont pas soumis à des forces externes. Nous pouvons exploiter cette propriété pour réduire la taille du système (4.5) en ne conservant que les véritables degrés de liberté du modèle, c'est-à-dire les noeuds de surface.

Supposons que les noeuds de surface correspondent aux k premiers noeuds. Le vecteur de déplacement \mathbf{U} peut alors se décomposer en deux blocs :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{U}_i \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

où \mathbf{U}_i et \mathbf{U}_s sont respectivement les vecteurs de déplacement de noeuds internes et des noeuds externes. Ce découpage en bloc peut être effectué sur la matrice de raideur (en se souvenant qu'elle est symétrique) et pour le vecteur des forces :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{si} \\ \mathbf{K}_{si}^t & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_i \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

L'équation matricielle d'équilibre (4.5) se transforme deux sous-systèmes :

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{K}_{ss}\mathbf{U}_s + \mathbf{K}_{si}\mathbf{U}_i = \mathbf{F}_s(\mathbf{U}_s) & (i) \\ \mathbf{K}_{si}^t\mathbf{U}_s + \mathbf{K}_{ii}\mathbf{U}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{U}_i) & (ii) \end{cases} \quad (4.18)$$

Or, l'énergie externe du modèle déformable étant définie comme l'intégrale d'un champ de potentiel *sur la surface* de l'objet, les forces nodales appliquées sur les noeuds intérieurs sont nulles, ce qui se traduit par $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$. En injectant ce résultat dans l'équation (4.18-ii), cette dernière conduit à une expression de \mathbf{U}_i en fonction de \mathbf{U}_s :

$$\mathbf{U}_i = -\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{si}^t\mathbf{U}_s \quad (4.19)$$

Nous pouvons alors obtenir une expression de l'énergie élastique faisant uniquement intervenir les noeuds de surface :

$$\begin{aligned} E_i &= \mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{U}_i \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{si} \\ \mathbf{K}_{si}^t & \mathbf{K}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{U}_i \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{U}_s^t \mathbf{K}_{ss} \mathbf{U}_s + \mathbf{U}_s^t \mathbf{K}_{si} \mathbf{U}_i + \mathbf{U}_i^t \mathbf{K}_{si}^t \mathbf{U}_s + \mathbf{U}_i^t \mathbf{K}_{ii} \mathbf{U}_i \\ &= \mathbf{U}_s^t \mathbf{K}_{ss} \mathbf{U}_s - \mathbf{U}_s^t \mathbf{K}_{si} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{si}^t \mathbf{U}_s - \dots \\ &\quad \dots - (\mathbf{U}_s^t \mathbf{K}_{si} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{si}^t \mathbf{U}_s)^t + \mathbf{U}_s^t \mathbf{K}_{si} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{si}^t \mathbf{U}_s \\ &= \mathbf{U}_s^t \mathbf{K}_s \mathbf{U}_s \end{aligned} \quad (4.20)$$

en posant :

$$\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_{ss} - \mathbf{K}_{si} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{si}^t \quad (4.22)$$

Finalement, la détermination de la position d'équilibre du maillage s'obtient par la résolution de l'équation :

$$\frac{d\mathbf{U}_s}{dt} + \mathbf{K}_s \mathbf{U}_s(t) = \mathbf{F}_s(\mathbf{U}_s(t)) \quad (4.23)$$

A la convergence, on peut éventuellement calculer la position des noeuds interne grâce à l'équation (4.19).

L'intérêt, d'un point de vue numérique, de la transformation que nous venons d'opérer n'est pas évident. Certes la taille du système d'équation est nettement inférieure, mais la matrice \mathbf{K} était extrêmement creuse, propriété que ne possède plus la matrice \mathbf{K}_s . En pratique, l'utilisation de méthodes numériques adaptées aux matrices creuses rend quasiment le gain lié à la réduction de taille.

Par contre, cette transformation peut être intéressante pour comparer le GE à d'autres approches manipulant des maillages de surface, par l'intermédiaire des modes des matrices de raideur.

4.1.6 Ajout de modes particuliers

La matrice de raideur définit des modes de déformation (cf. section 3.3). A chaque mode est associée une valeur propre qui mesure en quelque sorte le coût énergétique du mode. Nous proposons une technique pour modifier la matrice de raideur en faisant apparaître un nouveau mode affecté d'une valeur propre choisie.

Soit \mathbf{V} le nouveau mode (vecteur unitaire) et v la valeur propre associée. Nous construisons la matrice \mathbf{P} de projection orthogonale sur \mathbf{V} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}\mathbf{V}^t \quad (4.24)$$

Elle possède les deux propriétés suivantes :

$$\text{Idempotence : } \mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P} \quad \text{Symétrie : } \mathbf{P}^t = \mathbf{P} \quad (4.25)$$

Cette matrice permet de décomposer un vecteur de déplacement quelconque en deux composantes, comme suit :

$$\mathbf{U} = \underbrace{\mathbf{P}\mathbf{U}}_{\alpha\mathbf{V}} + \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{U}}_{\mathbf{U}_1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{U}_1 \perp \mathbf{V} \quad \text{et } \alpha \in \mathbb{R} \quad (4.26)$$

Soit E' la fonction d'énergie définie par :

$$E'(\mathbf{U}) = E(\mathbf{U}_1) + v * \alpha \quad (4.27)$$

$$= ((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{U})^t \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{U} + v(\mathbf{P}\mathbf{U})^t \mathbf{P}\mathbf{U} \quad (4.28)$$

On fait apparaître la nouvelle matrice de raideur :

$$E'(\mathbf{U}) = \mathbf{U}^t \mathbf{K}' \mathbf{U} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}' = (\mathbf{I} - \mathbf{P})^t \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{P}) + v \mathbf{P}^t \mathbf{P} \quad (4.29)$$

On vérifie aisément que \mathbf{V} est vecteur propre de \mathbf{K}' en remarquant que par définition de \mathbf{P} , nous avons l'égalité $\mathbf{P}\mathbf{V} = \mathbf{V}$. On peut également noter que les vecteurs propres orthogonaux à \mathbf{V} (ce qui implique $\mathbf{P}\mathbf{V}_i = \mathbf{0}$) demeurent vecteurs propres avec les mêmes valeurs propres.

Nous présentons un exemple de modification de matrice de raideur par ajout d'une valeur propre fixée sur un objet élastique 2D. Les figures 4.2 et 4.3 montrent les modes propres basses fréquences de cet objet avant et après modification.

4.2 Régularisation des interfaces du modèle

Le modèle que nous avons proposé au chapitre précédent est un modèle relativement simple puisque ses propriétés mécaniques dépendent de deux paramètres (module d'Young et coefficient de Poisson). Nous nous proposons d'introduire un terme supplémentaire dans l'énergie interne de manière à mieux contrôler la régularité des interfaces du modèle.

4.2.1 Définition d'une énergie interne de régularisation des interfaces

Nous présentons le principe de la méthode en 2D. En fin de chapitre, nous détaillons l'extension 3D.

Notations

- Γ : interfaces du modèle non déformé (1 ou plusieurs contours fermés en 2D).
- $\mathbf{x}(s)$: équation paramétrique des contours du modèle 2D initial (non déformé).
- $\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(s))$: restriction de la fonction de déplacement aux interfaces.
- $\mathbf{x}'(s)$: équation paramétrique des contours du modèle 2D déformé.
- Γ_s : domaine de variation du paramètre s

Nous souhaitons pouvoir contrôler la régularité des interfaces du modèle de manière indépendante de l'élasticité de la région intérieure. Nous proposons d'ajouter un terme E_{ci} à l'énergie interne du modèle (“c” comme “contour”) en nous inspirant de l'énergie interne des “snakes” (cf. chapitre 2), qui est :

$$E_{snake} = \underbrace{\int_{\Gamma_s} \left| \frac{\partial \mathbf{x}'(s)}{\partial s} \right|^2 ds}_{tension} + \underbrace{\int_{\Gamma_s} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{x}'(s)}{\partial s^2} \right|^2 ds}_{flexion} \quad (4.30)$$

Nous pourrions utiliser directement ce terme d'énergie dans l'expression de l'énergie interne de notre modèle. Cependant, nous pouvons formuler deux remarques à son égard :

- D'une part le terme d'énergie de tension n'a pas pour fonction de régulariser la forme du contour, mais de répartir la tension sur tout le contour.
- D'autre part, le “snake” possède la particularité de converger, en l'absence de forces extérieures, vers une courbe d'énergie minimale très particulière, à savoir *un point*.

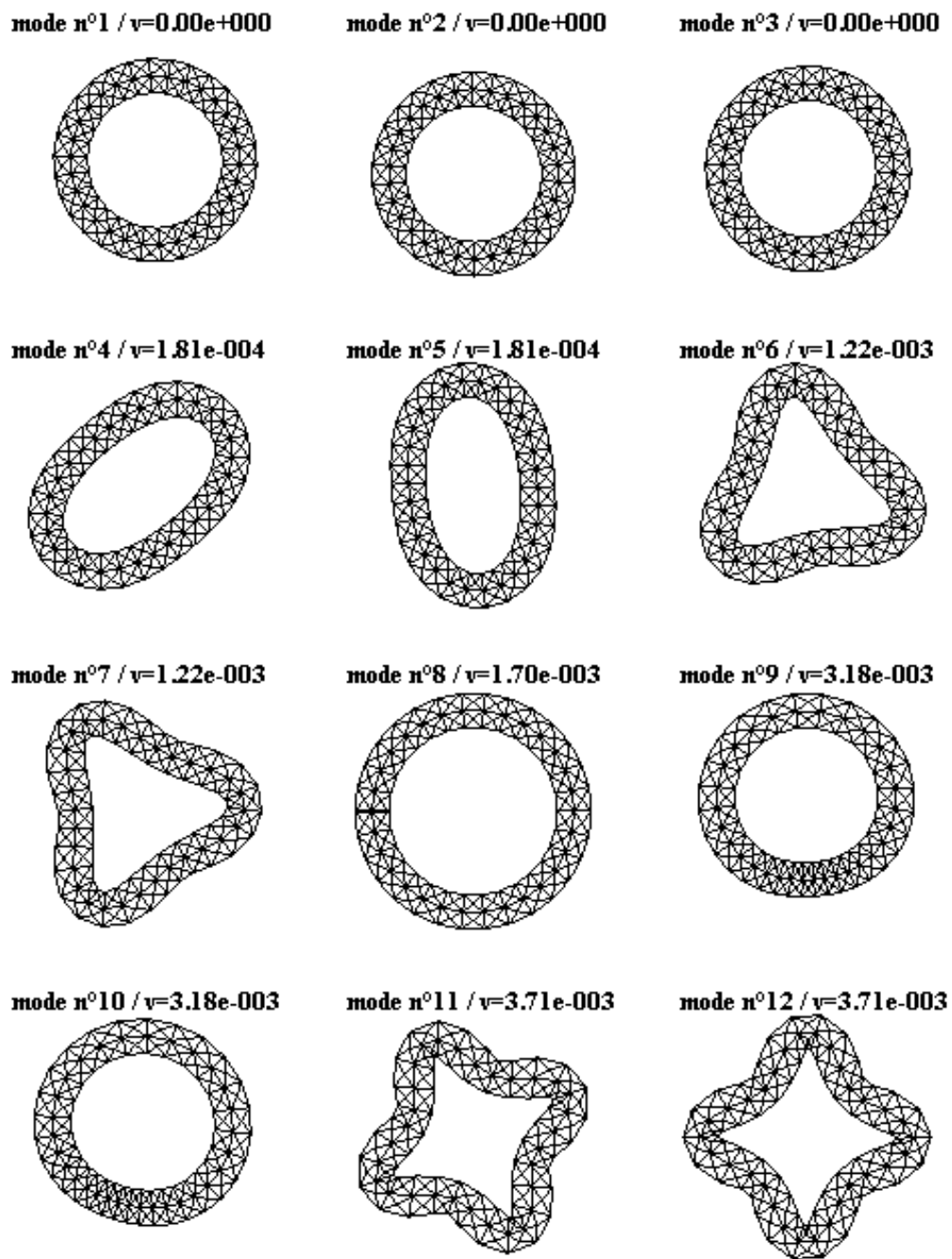


FIG. 4.2 – Modes propres basses fréquences d'un maillage (avec valeur propre ν associée)

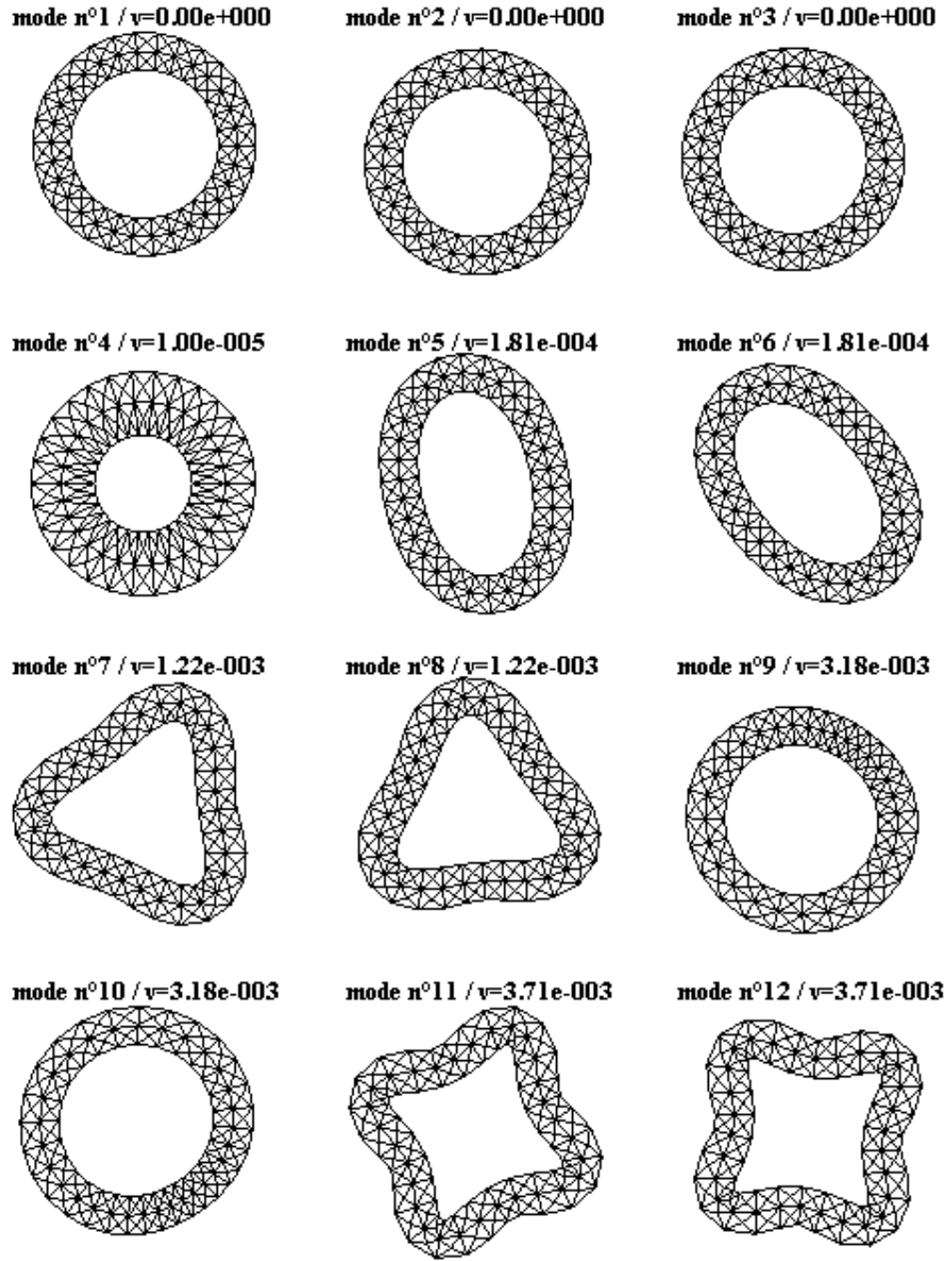


FIG. 4.3 – Introduction d'un nouveau mode (mode n° 4, valeur propre = $1.0e-5$.) parmi les modes propres basses fréquences d'un maillage, par modification de la matrice de raideur. Compte tenu de la valeur propre que nous avons choisie, le mode ajouté s'intercale en 4ème position, entre les modes n°3 et n°4 de la figure 4.2. Les modes suivants (5, 6, etc.) ont donc été décalés d'un rang vers la droite par rapport à la figure 4.2

Il ne nous paraît donc pas utile de conserver le terme d'énergie de tension, d'autant plus que l'énergie élastique déjà présente dans notre modèle a pour effet naturel une répartition de la tension dans tout le modèle, et donc a fortiori sur les contours. La deuxième remarque, quant à elle, soulève un problème de fond : si nous définissons l'énergie d'un modèle déformable en ajoutant une énergie élastique et une énergie de type "snake", le modèle résultant aura un comportement étrange en l'absence de forces extérieures. En effet, l'énergie élastique tendra à préserver la forme originale du modèle, tandis qu'à ses interfaces, les "snakes" exerceront des efforts dans le sens d'une contraction ; le modèle aura donc un état d'équilibre à mi-chemin entre ces deux influences. Ce type de comportement nous paraît peu satisfaisant. Il semble plus cohérent que l'état d'équilibre d'un modèle en l'absence de forces externes soit son état initial.

Cette réflexion nous a donc amenés à proposer une nouvelle formulation de l'énergie de régularisation des contours de notre modèle, sans terme de tension, et avec prise en compte de la forme initiale :

$$E_{ci} = \int_{\Gamma_s} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{x}'(s)}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{x}(s)}{\partial s^2} \right|^2 ds \quad (4.31)$$

L'idée sous-jacente est la suivante : l'opérateur de dérivée seconde fournissant une mesure d'irrégularité, nous cherchons à minimiser l'écart d'irrégularité entre le contour en déformation et le contour initial. Nous pouvons faire apparaître la fonction de déplacement aux interfaces $\mathbf{u}(s)$ dans l'expression précédente :

$$E_{ci} = \int_{\Gamma_s} \left| \frac{\partial^2 (\mathbf{x}'(s) - \mathbf{x}(s))}{\partial s^2} \right|^2 ds = \int_{\Gamma_s} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}(s)}{\partial s^2} \right|^2 ds \quad (4.32)$$

4.2.2 Discrétisation de l'énergie interne de contour

La discrétisation de l'énergie interne de contour peut être effectuée de plusieurs manières :

a- Méthode des éléments finis

Pour discrétiser l'énergie élastique, nous avons eu recours à la méthode des éléments finis. Le domaine de l'objet élastique a été maillé, et des fonctions de base ont été définies sur les éléments du maillage qui permettent d'évaluer les déplacements à l'intérieur d'un élément par interpolation des déplacements de ses nœuds. Ces fonctions de base fournissent donc tout naturellement une interpolation du déplacement sur la frontière du domaine, et peuvent donc être utilisées pour calculer une approximation discrète de l'énergie interne de contour.

Il faut cependant noter que l'énergie interne de contour requiert le calcul de la dérivée seconde du déplacement sur la frontière, alors que l'énergie élastique ne requiert que le calcul de la dérivée première. Cette remarque a son importance, puisque le choix des fonctions de base dépend en partie de l'ordre des dérivations requis. Si pour l'énergie

élastique, des fonctions de base linéaires -donc dérivables une fois, suffisaient, des fonctions de base quadratiques sont nécessaires au calcul de l'énergie interne de contour.

b- Méthode des différences finies

Nous transformons l'intégrale de la dérivée seconde du déplacement le long du contour en somme des valeurs en certains points de cette dérivée seconde. Ces points sont les nœuds de bord du maillage utilisé pour l'approximation de l'énergie élastique. En chacun de ces points, la dérivée seconde est approchée par la méthode des différences finies, c'est-à-dire en utilisant les valeurs du déplacement sur les nœuds voisins.

Nous introduisons tout d'abord les notations suivantes :

- La frontière du maillage constitue un ensemble de polygones. On considère l'un d'entre eux, appelé C_j . Il est constitué de n_j sommets, notés $(A_{ij})_{1 \leq i \leq n_j}$.
- Nous appelons *numérotation locale* la numérotation propre à un polygone (indice i). Soit p la fonction qui permet de passer de la numérotation locale à la numérotation globale du maillage. Ainsi, si le nœud i du polygone j a pour numéro global k , alors $p(i, j) = k$. On adopte également la convention suivante : $p(0, j) = p(n_j, j)$ et $p(n_j + 1, j) = p(1, j)$ qui traduit le fait que le contour est fermé.
- Les polygones sont supposés réguliers. Soit d_j la longueur d'arête du polygone j .

La valeur de la dérivée seconde du déplacement au nœud d'indice local i peut alors être approchée par :

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{u}(s)}{\partial s^2} \right|_{\text{nœud } i} = \frac{\mathbf{u}_{p(i+1,j)} - 2\mathbf{u}_{p(i,j)} + \mathbf{u}_{p(i-1,j)}}{d_j^2} \quad (4.33)$$

et l'énergie interne du contour C_j vaut alors :

$$E_{ci}^j = \sum_{i=1}^{n_j} \left| \frac{\mathbf{u}_{p(i+1,j)} - 2\mathbf{u}_{p(i,j)} + \mathbf{u}_{p(i-1,j)}}{d_j^2} \right|^2 \quad (4.34)$$

L'énergie E_{ci}^j est une fonction quadratique des déplacements aux noeuds du maillage. Elle peut donc être écrite sous forme matricielle :

$$E_{ci}^j = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K}_j \mathbf{U} \quad (4.35)$$

Il est à noter que la matrice \mathbf{K}_j est particulièrement creuse, puisque seuls les éléments correspondant à des noeuds de bord sont non nuls. Dans l'éventualité où l'interface de l'objet élastique serait composée de plusieurs contours, l'énergie interne de contour sera la somme pondérée des énergies de chacun des contours :

$$E_{ci} = \sum_j \lambda_j E_{ci}^j \quad (4.36)$$

L'énergie interne du modèle devient :

$$E_i = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K}'' \mathbf{U} \quad \text{avec } \mathbf{K}'' = \underbrace{\mathbf{K}}_{\text{élasticité}} + \underbrace{\sum_j \lambda_j \mathbf{K}_j}_{\text{contours}} \quad (4.37)$$

La figure 4.4 montre les premiers modes de la matrice \mathbf{K}'' pour un maillage en couronne avec attribution d'une énergie de flexion au contour externe. Ces modes ressemblent aux modes originaux (figure 4.2), mais font nettement apparaître une dissymétrie entre les deux contours. L'amplitude de mouvements du contour externe est, comme attendu, moins prononcée que celle du contour interne.

Expression 3D de l'énergie interne de contour

Le passage du 2D au 3D ne pose pas de problème particulier. L'interface de l'objet élastique est maintenant constituée d'un ensemble de surfaces S_j , dont on a une expression paramétrique $\mathbf{x}_j(r, s)$ (avec $(r, s) \in \Gamma_{rs}$). On définit également la fonction de déplacement sur cette surface $\mathbf{u}_j(r, s)$. L'énergie interne de chacune de ces surfaces, notée E_{si}^j , conçue comme extension 3D de l'énergie (4.32) repose sur les dérivées secondes de $\mathbf{u}_j(r, s)$ et a pour expression :

$$E_{si}^j = \int_{\Gamma_{sr}} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial r^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial r \partial s} \right|^2 ds dr \quad (4.38)$$

La discrétisation de ce terme d'énergie peut se faire avec la méthode des éléments finis. L'approximation par différences finies n'est en revanche pas possible sur une surface au maillage irrégulier tel que celui que nous utilisons. L'application de la MEF conduit à une formulation matricielle analogue à (4.35).

4.3 Discussion

L'idée la plus novatrice du gabarit déformable que nous avons présenté est certainement le fait de régulariser les interfaces de l'objet élastique. Cette idée conduit à une sorte de cohabitation entre un modèle semi-biomécanique et un modèle de traitement d'image de type surface déformable. L'association de ces deux notions peut sembler paradoxale puisqu'elle peut être interprétée comme un retour en arrière par rapport à un objectif qui serait d'aller vers des modèles biomécaniques plus réalistes. Elle se justifie pourtant si l'on souhaite opérer en une seule étape le processus de la segmentation et de l'estimation d'un champ de déformation volumique. Les données étant extrêmement bruitées, un modèle élastique isotrope passif, qui est très éloigné d'un modèle réaliste de myocarde (d'où le terme “*semi*-biomécanique” employé précédemment), ne peut suffire dans la plupart des cas à contraindre correctement les déformations. Ceci explique que, en imagerie cardiaque, les modèles élastiques étaient jusqu'à présent appliqués au traitement de données sélectionnées (contours/surfaces segmentés *semi*-automatiquement) [DSCS98, HMA00, PSDD01].

Il est intéressant d'inverser la présentation gabarit élastique que nous avons faite. Plutôt que de le considérer comme un objet élastique aux interfaces régularisées, nous pouvons en effet le considérer comme un ensemble de surfaces actives auxquelles on adjoint

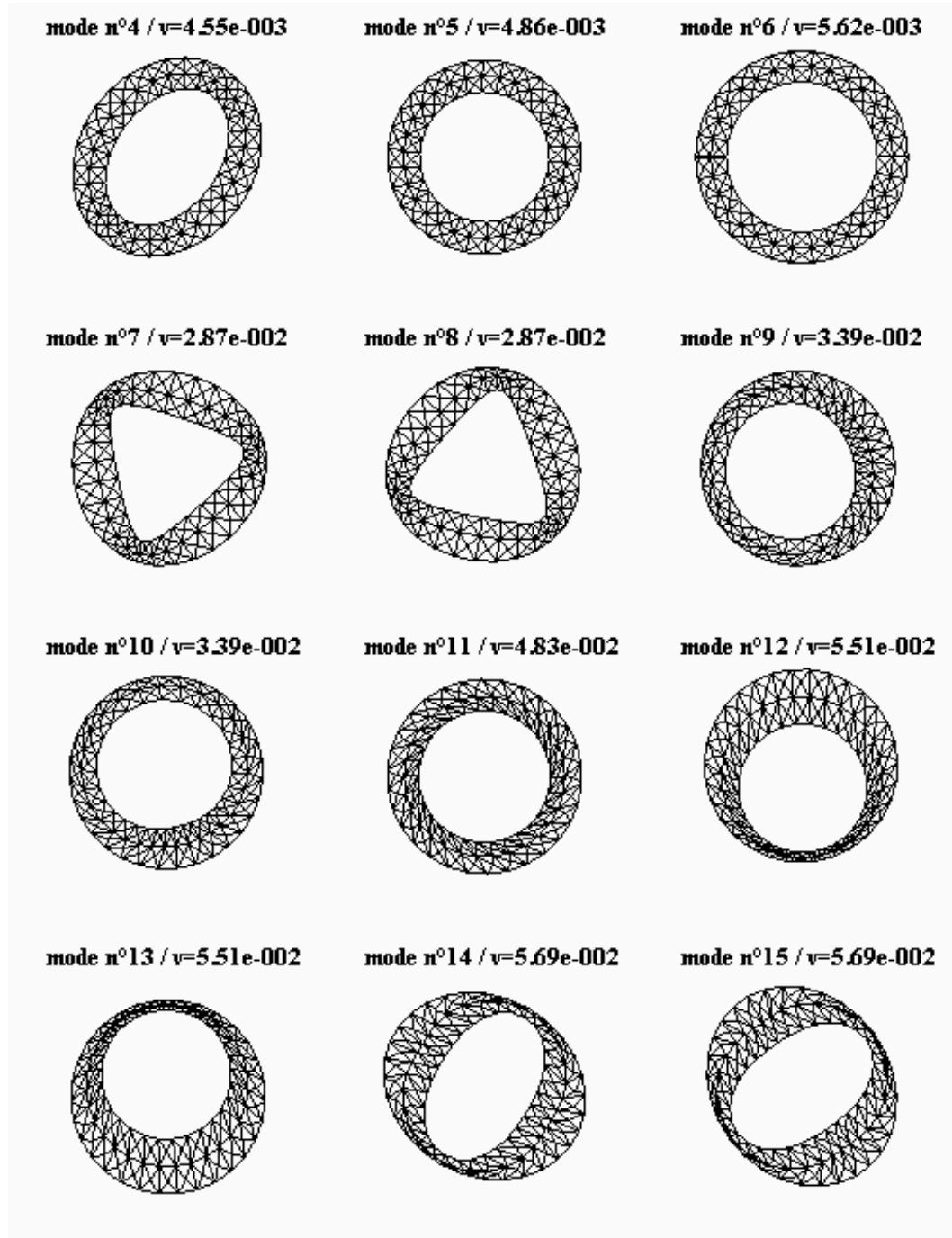


FIG. 4.4 – Modes de la matrice \mathbf{K}'' , avec un terme de contour pour le contour externe ($\lambda_1 = 1$). Comparer à la figure 4.2

une contrainte additionnelle issue de l'élasticité intérieure. L'élasticité permet d'interpoler en quelque sorte le champ de déplacement aux interfaces pour en donner une représentation volumique, tout en apportant une contrainte de couplage entre les surfaces.

Nous présentons dans le chapitre suivant des résultats de l'application du gabarit élastique à l'imagerie cardiaque.

Chapitre 5

Résultats

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de segmentation obtenus sur des séquences d'images par RM monocoupes (2D) et multicoupes (3D). Dans ces deux cas, nous précisons le principe et les conditions d'expérimentation. L'évolution de la contrainte sur le modèle au cours du processus de minimisation requiert d'être capable d'interagir en permanence avec l'algorithme de résolution par éléments finis. Une étude de plusieurs logiciels et bibliothèques de calcul par EF du marché ou d'accès libre, a montré que cette interaction est soit impossible soit éventuellement envisageable mais au prix d'une grande complexité de développement. C'est pourquoi, nous avons décidé d'implanter notre propre bibliothèque de minimisation par éléments finis.

Nous débutons ce chapitre par la présentation des différents types d'énergie externe considérés.

5.1 Énergie Externe

L'énergie externe de notre modèle déformable est définie comme l'intégrale, sur la surface de l'objet déformé, d'une fonction de potentiel P . Nous présentons ci-dessous les quelques champs de potentiel que nous avons étudiés. Le lecteur trouvera également un étude complémentaire dans [CC93].

Les champs de potentiel étudiés sont :

- **A-** Norme du gradient : $P_i = |\nabla I_i|$
- **B-** Calcul d'une image de contours binaires par filtrage de Canny-Deriche [Can86] puis convolution par un filtre gaussien (écart-type γ_2) pour étaler les contours [CC93]. Le filtre de Canny-Deriche consiste en un lissage de l'image (filtre gaussien d'écart-type γ_1) suivi d'un seuillage à hysteresis (seuilbas h_1 , seuil haut h_2). Le paramètre γ_1 est le facteur d'échelle.
- **C-** A partir de l'image binaire obtenue précédemment, construction d'une carte de distance D [Bor86]. Le potentiel est alors défini par $P = D^2$.

Comme nous l'avons vu précédemment, le champ de potentiel permet de définir un

champ de force \mathbf{t} . Il est possible de construire un champ de force qui ne dérive pas d'un champ de potentiel. La technique du *Gradient Vector Flow (GVF)* en est un exemple [XP98]. Schématiquement, le point de départ de l'algorithme est un champ de force obtenu de manière classique (par dérivation d'un champ de potentiel). Ce champ est ensuite transformé par un processus de diffusion. Dans notre étude, nous utiliserons deux types de champ de force obtenus par l'algorithme GVF :

- **D**- Un GVF obtenu à partir de la norme du gradient (cf. **A**).
- **E**- Un GVF obtenu à partir d'une image de contour binaire (filtrage de Canny-Deriche, cf. **B**).

En 3D, le champ de force est calculé plan par plan et interpolé linéairement. De plus, nous n'avons considéré dans cette étude que des plans de coupes en petit axe, le champ de force qui en dérive n'a donc pas de composante selon la direction du grand axe du coeur. Ce calcul a été depuis repris en "vrai" 3D dans le cadre de la thèse en cours au laboratoire de Quoc-Cuong Pham.

5.2 Résultats de segmentation en 2D

Principe et conditions expérimentales

En 2D, le modèle a priori de la paroi ventriculaire gauche est un anneau élastique dont la représentation maillée est obtenue analytiquement (figure 3.2). Cet anneau est positionné interactivement dans la première image de la séquence. La stratégie en deux étapes utilisée est illustrée figure 5.1. La première étape correspond à un recalage rigide (figure 5.1(a)) où une forte rigidité ($E = 100$) est attribuée au modèle pour en limiter les déformations locales. Dans une seconde étape, le modèle est rendu plus souple afin de l'autoriser à se conformer localement aux données (figure 5.1(b)) .

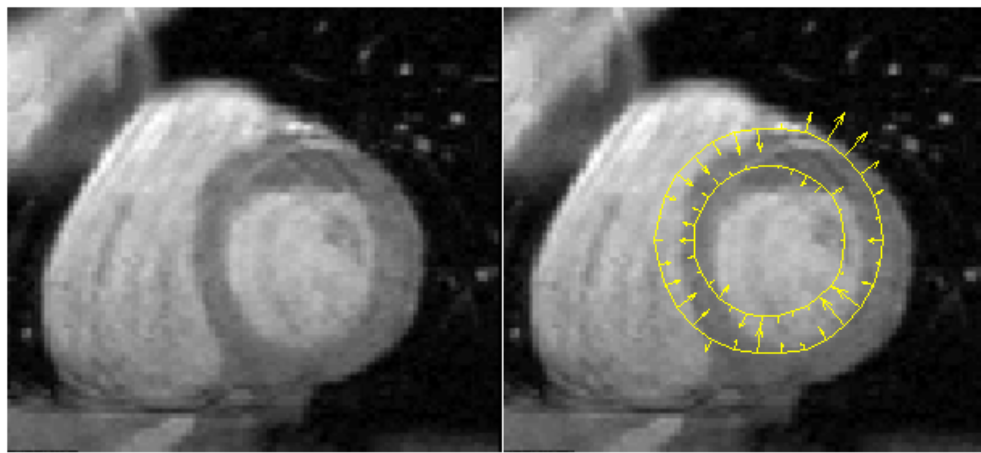
La segmentation des phases suivantes de la séquence s'effectue simplement par la copie du modèle obtenu à la phase précédente sur l'image de la phase courante. Il n'est alors plus nécessaire d'avoir recours à la phase de recalage rigide.

Le programme mettant en oeuvre la segmentation par gabarit élastique 2D a été écrit dans l'environnement Matlab¹

Ajout d'un mode de déformation

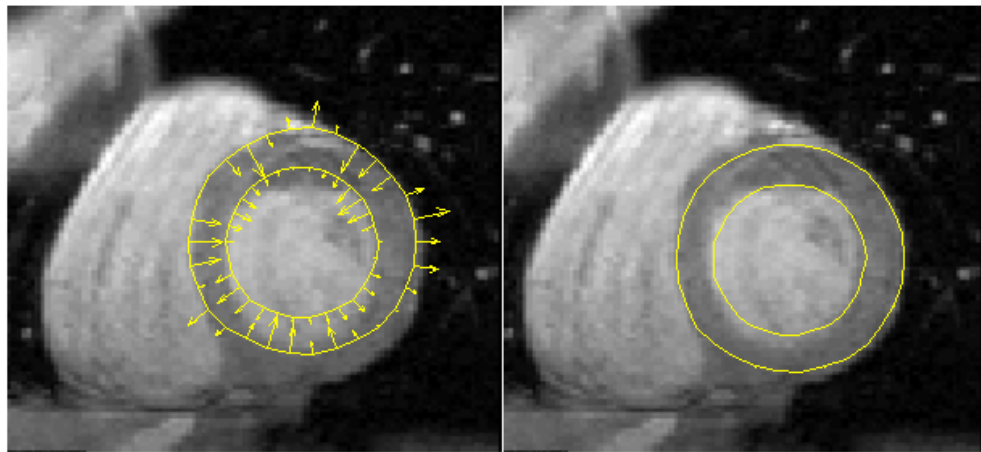
La figure 5.2(a) montre le résultat de la segmentation d'une séquence avec le modèle élastique simple (i.e. Energie interne = Energie élastique). On peut constater que le modèle a des difficultés à suivre la contraction : au lieu de voir son rayon diminuer, le cercle intérieur se pince en plusieurs endroits. Pour résoudre ce problème, nous introduisons un nouveau mode dans le modèle, comme exposé au chapitre 4. Le mode ajouté est le mode

¹<http://www.mathworks.com>



Original Image

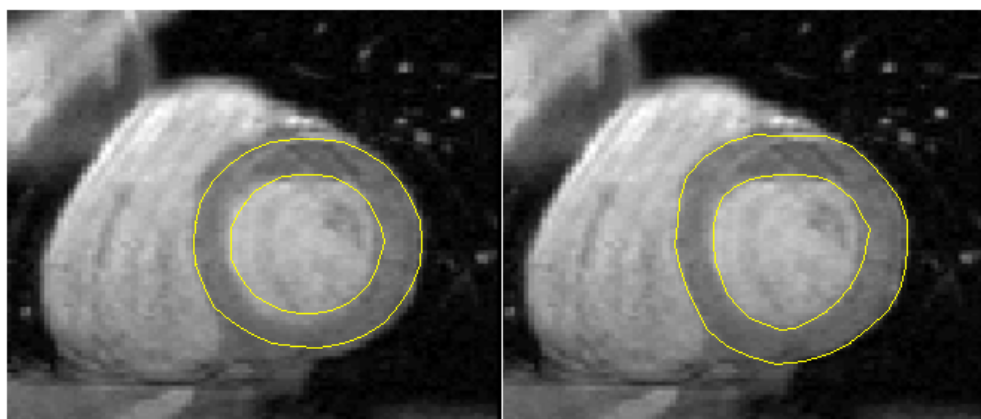
Initial positioning of the LV model



Intermediate phase of the rigid segmentation

Final stage of the rigid step

(a) Première étape rigide de la segmentation



Starting situation

Final result

(b) Seconde étape de déformation locale

FIG. 5.1 – Segmentation d’une séquence temporelle 2D par le Gabarit Elastique : principe.

n°4 de la figure 4.3. Il correspond à une diminution du diamètre du cercle intérieur, le cercle extérieur conservant un diamètre fixe. Ce type de déformation étant intuitivement l'une des déformations principales du coeur au cours de sa contraction, nous lui avons attribué une valeur propre nulle afin qu'il ne soit pas pénalisé lors de la segmentation. La figure 5.2(b) montre, toutes choses égales par ailleurs, l'amélioration du résultat produit par l'ajout du mode.

Régularisation des interfaces

A certains niveaux de coupe, on voit apparaître, dans les séquences, les muscles papillaires. Ceux-ci sont parfois collés au myocarde, comme dans la figure 5.4, et il est extrêmement difficile de les dissocier. Dans l'optique d'un calcul de masse myocardique ou de l'étude de la contraction du myocarde, il serait intéressant de disposer d'un algorithme de segmentation permettant de délimiter la frontière entre myocarde et muscle papillaire. En raison de la difficulté d'une telle opération, nous avons choisi d'extraire le contour de la cavité, c'est-à-dire d'intégrer les muscles papillaires. Cette opération requiert un modèle relativement souple (E petit), qui puisse s'adapter au contour sinueux de la cavité. Afin d'imposer toutefois une certaine rigidité au contour externe qui se déforme peu, nous avons introduit un terme de régularisation de contour selon le principe exposé à la section 4.2. La figure 5.4 montre les résultats de la segmentation.

5.3 Résultats en 3D

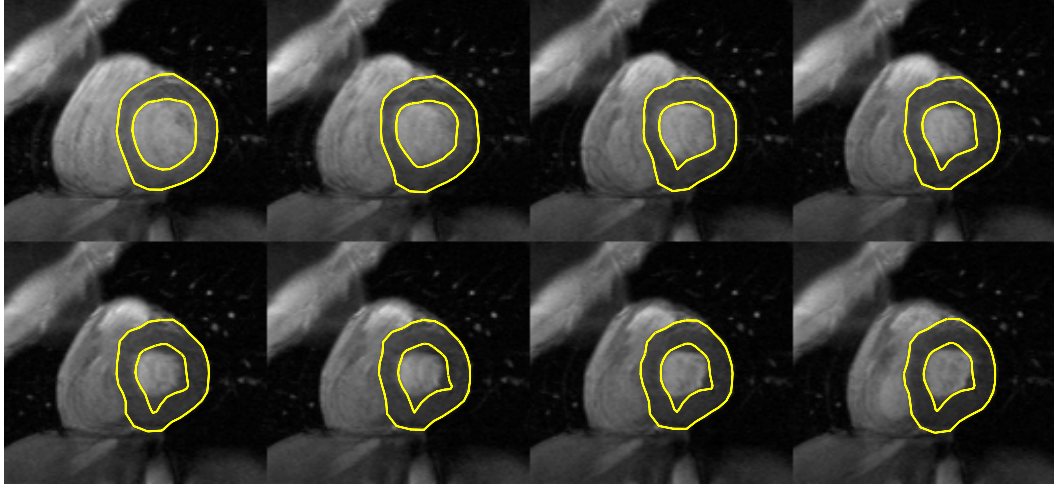
Principe et conditions expérimentales

Le modèle 3D de la paroi ventriculaire gauche est un demi-ellipsoïde épais, maillé en tétraèdres (figure 5.5). La construction du maillage a été obtenue en utilisant GID², un logiciel de CAO. Le modèle est positionné soit manuellement à partir d'outils de manipulations interactives 3D, soit semi-automatiquement par une mise en correspondance rigide de quelques points anatomiques repérés dans les images : apex, points interventriculaires antérieur et postérieur au niveau de la base. Une version plus sophistiquée de l'initialisation réalise un recalage non-rigide, basé sur les splines de plaque mince, de points saisis à la volée sur l'endocarde et l'épicarde dans les images. Les résultats exposés dans cette section ont été obtenus en collaboration avec Quoc-Cuong Pham, doctorant au laboratoire, en particulier pour les expérimentations basées les énergies externes de type **D** et **E** (GVF).

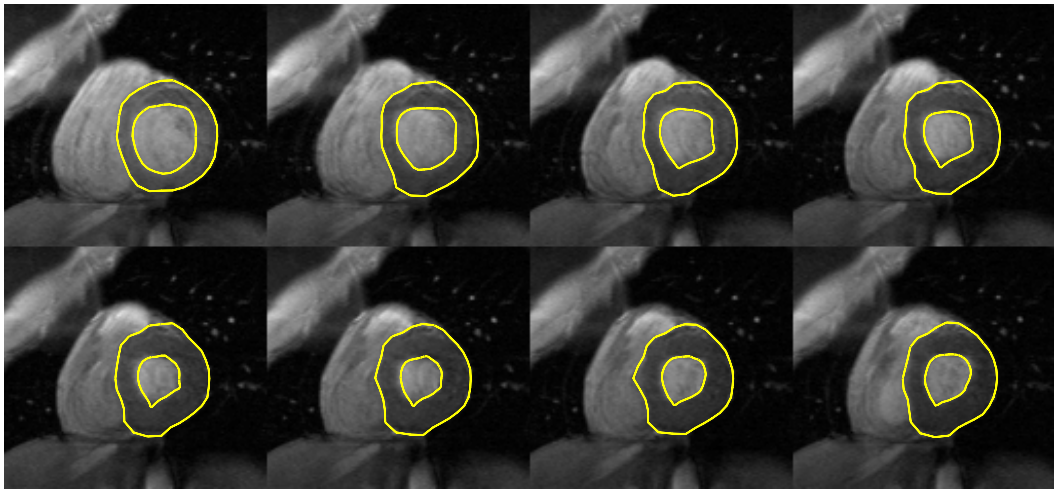
Le programme mettant en oeuvre la segmentation par Gabarit Elastique 3D a été écrit en C++, avec utilisation de la librairie de calcul numérique PETSc³

²<http://gid.cimne.upc.es>

³<http://www-fp.mcs.anl.gov/petsc>



(a) Sans ajout d'un mode de contraction



(b) Avec ajout d'un mode de contraction

FIG. 5.2 – Mise en évidence de l'intérêt de l'ajout d'un mode de contraction (mode n°4 de la figure 4.3) pour le suivi du myocarde.

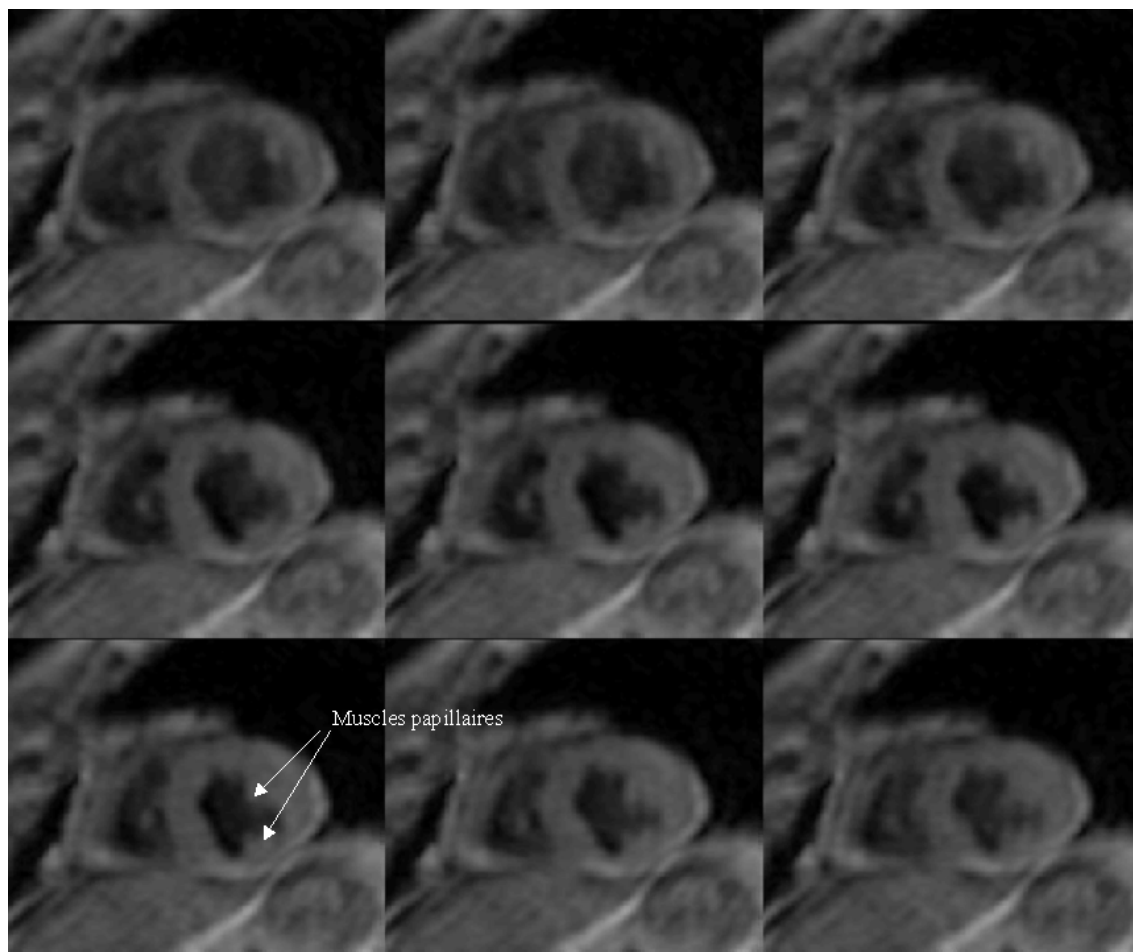


FIG. 5.3 – Séquence temporelle d'IRM "sang noir".

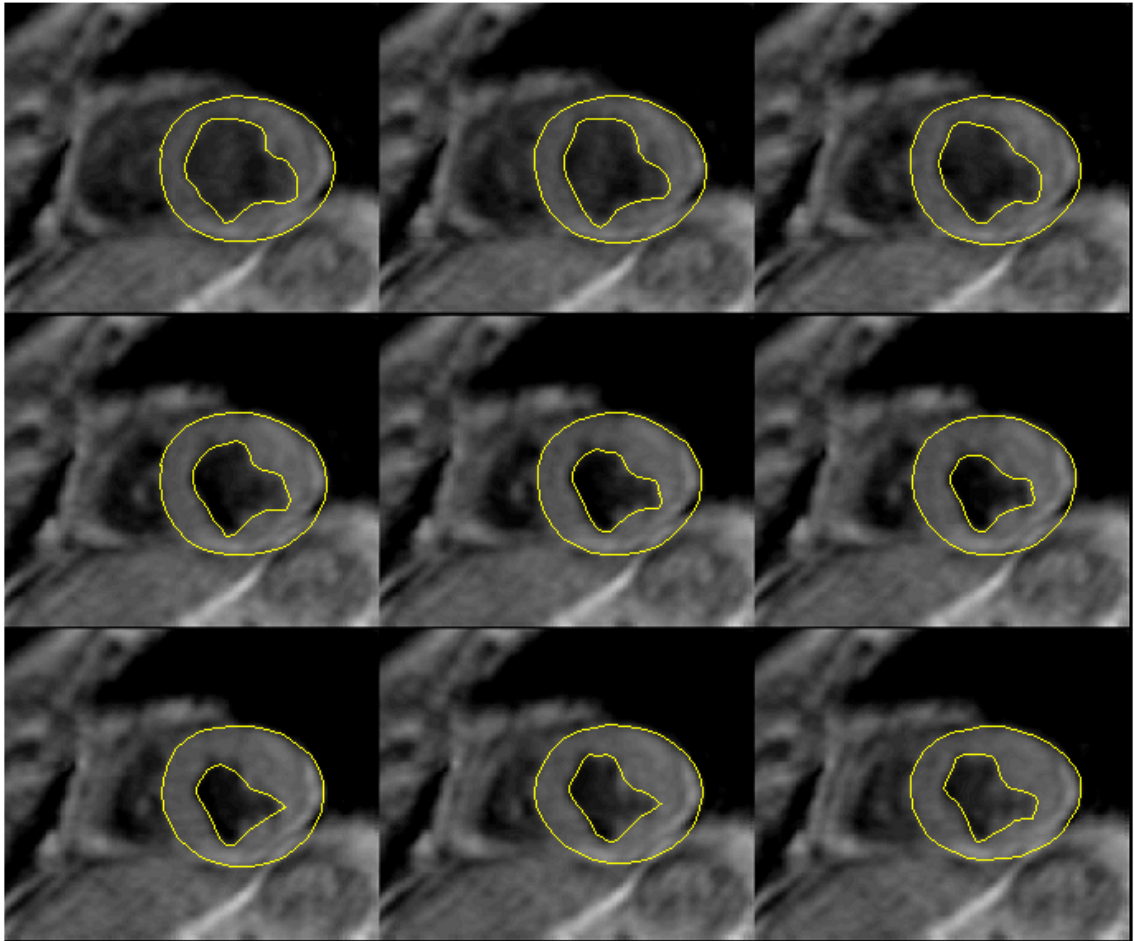


FIG. 5.4 – Segmentation d’une séquence d’IRM “sang noir” avec régularisation du contour externe.

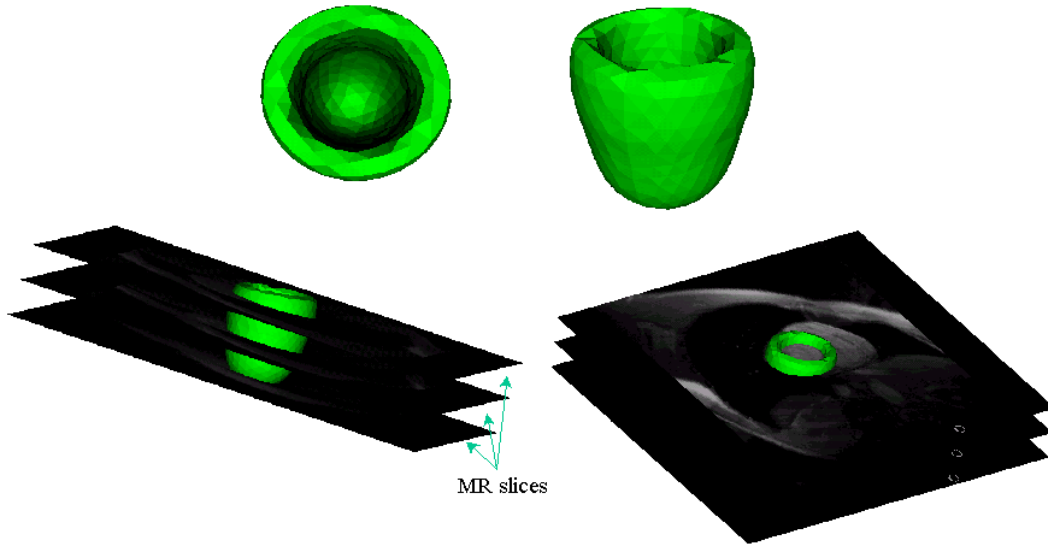


FIG. 5.5 – Modèle 3D du ventricule gauche, composé d'environ 2600 éléments. Ce modèle est positionné en 3D dans les données IRM constituées d'un empilement de coupes.

Segmentation statique

Nous illustrons les résultats obtenus sur 2 cas de patients identifiés P1 et P2, respectivement. La segmentation est réalisée sur le premier instant de la séquence. La figure 5.6 montre les résultats obtenus avec un modèle rigide ($E = 1$), une initialisation par mise en correspondance rigide et une énergie externe du type **B** sur le cas P1 à trois niveaux du coeur en petit axe. On constate la difficulté qu'a le modèle à s'adapter aux données. Un modèle plus souple ($E = 0.5$) combiné à une initialisation non-rigide permet d'obtenir de meilleurs résultats (figure 5.7). Les résultats obtenus sur le second cas avec les mêmes paramètres sont reproduits figure 5.8, sous la même forme. Pour la segmentation 3D, nous avons choisi d'exclure les muscles papillaires.

Segmentation dynamique

La suivi dans une séquence 3D s'effectue de la même façon qu'en 2D par copie du modèle déformé obtenu à l'instant précédent sur l'image courante. La figure 5.9 illustre les résultats obtenus pour le cas P1 sur trois niveaux de coupe et à trois instants du cycle avec les mêmes paramètres que précédemment. La séquence de maillages issus du suivi et représentant le myocarde ventriculaire gauche au cours de la systole cardiaque est reproduite figure 5.10. Elle met en évidence l'épaississement de la paroi.

Les figures 5.11 et 5.12 montrent des résultats obtenus sur trois niveaux de coupes à trois instants successifs pour deux type d'énergies externes **B** (filtrage Canny-Deriche) et **E** (GVF). Pour le premier instant de la séquence, les paramètres du modèle sont $E = 1, \nu = 0$, pour les instants suivants les valeurs $E = 2, \nu = 0.3$ ont été utilisées. L'énergie externe

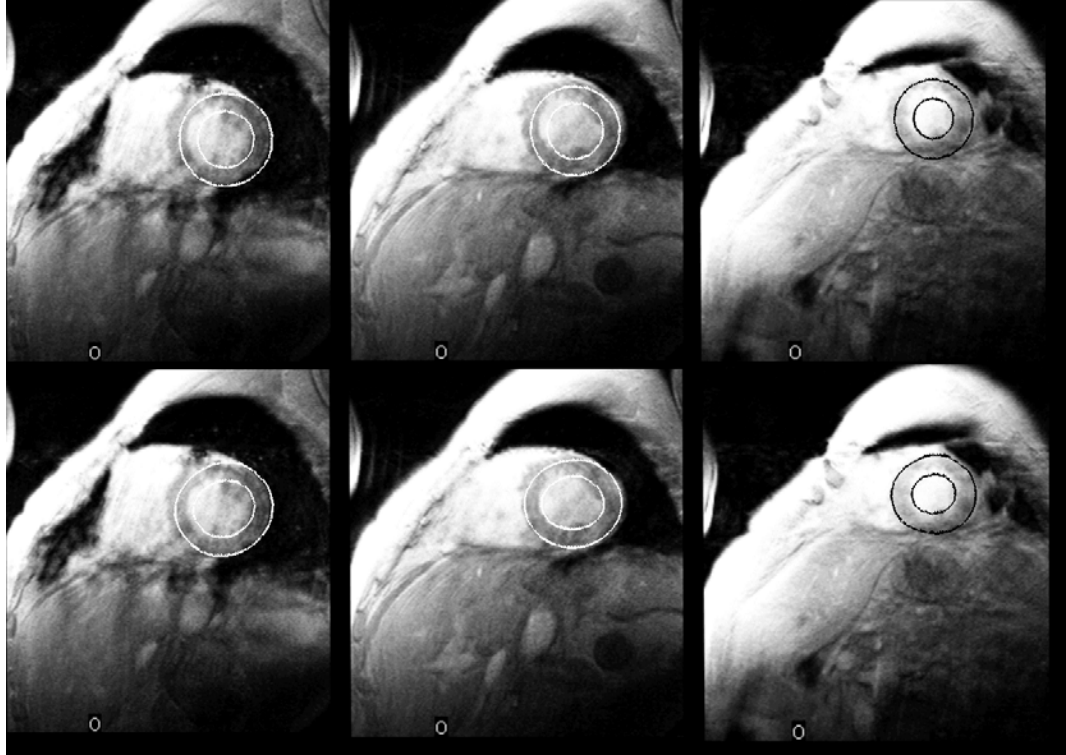


FIG. 5.6 – Résultats de la segmentation du cas P1 au premier instant de la séquence (télé-diastole) sur 3 niveaux de coupe (niveau le plus basal à gauche, niveau apical à droite). Les contours représentent l'intersection du modèle 3D avec les plans de coupes avant (en haut) et après (en bas) adaptation du modèle. Les paramètres sont $E = 1$, $\nu = 0$, $\gamma_1 = 0.1$, énergie externe de type **B** (filtrage Canny-Deriche).

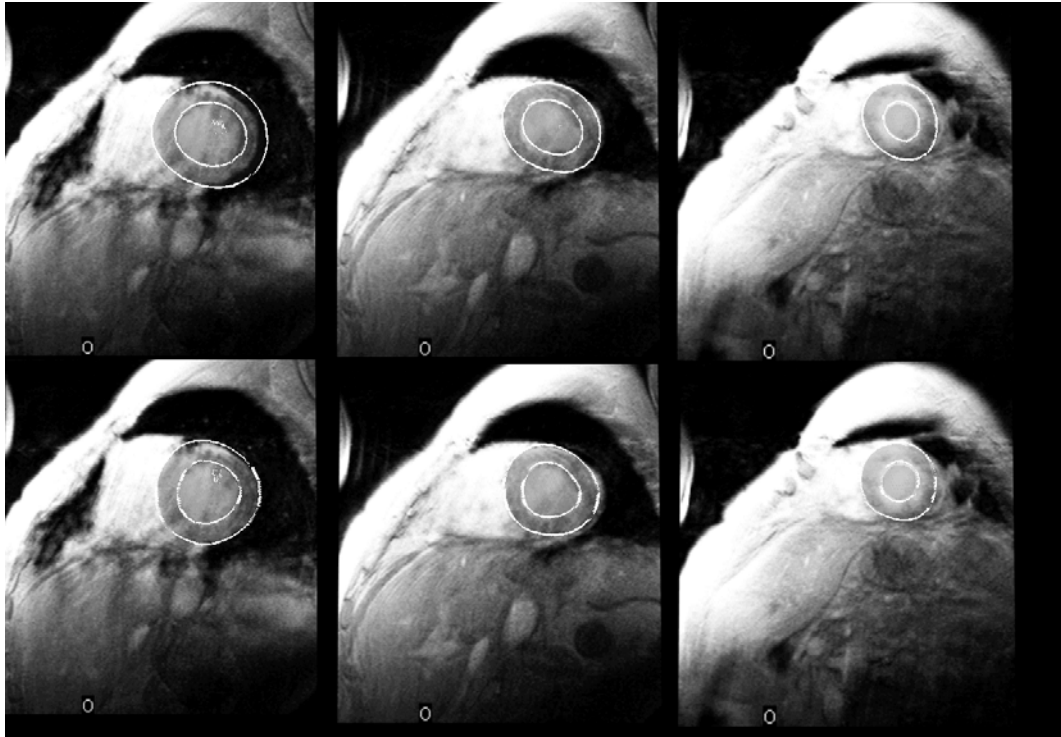


FIG. 5.7 – Résultats de la segmentation du cas P1 au premier instant de la séquence (télé-diastole) sur 3 niveaux de coupe (niveau le plus basal à gauche, niveau apical à droite). Les contours représentent l'intersection du modèle 3D avec les plans de coupes avant (en haut) et après (en bas) adaptation du modèle. Les paramètres sont $E = 0.5$, $\nu = 0$, $\gamma_1 = 0.1$ avec l'énergie externe \mathbf{B} .

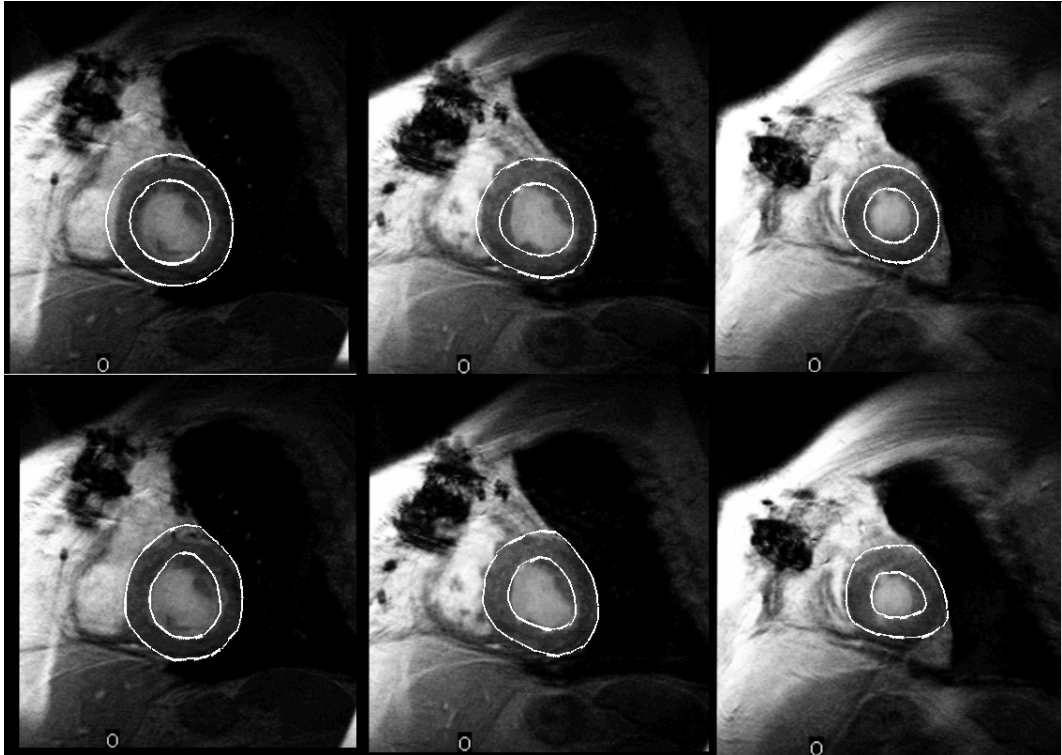


FIG. 5.8 – Résultats de la segmentation du cas P2 au premier instant de la séquence (télé-diastole) sur 3 niveaux de coupe (niveau le plus basal à gauche, niveau apical à droite). Les contours représentent l'intersection du modèle 3D avec les plans de coupes avant (en haut) et après (en bas) adaptation du modèle. Les paramètres sont $E = 0.5$, $\nu = 0$, $\gamma_1 = 0.1$

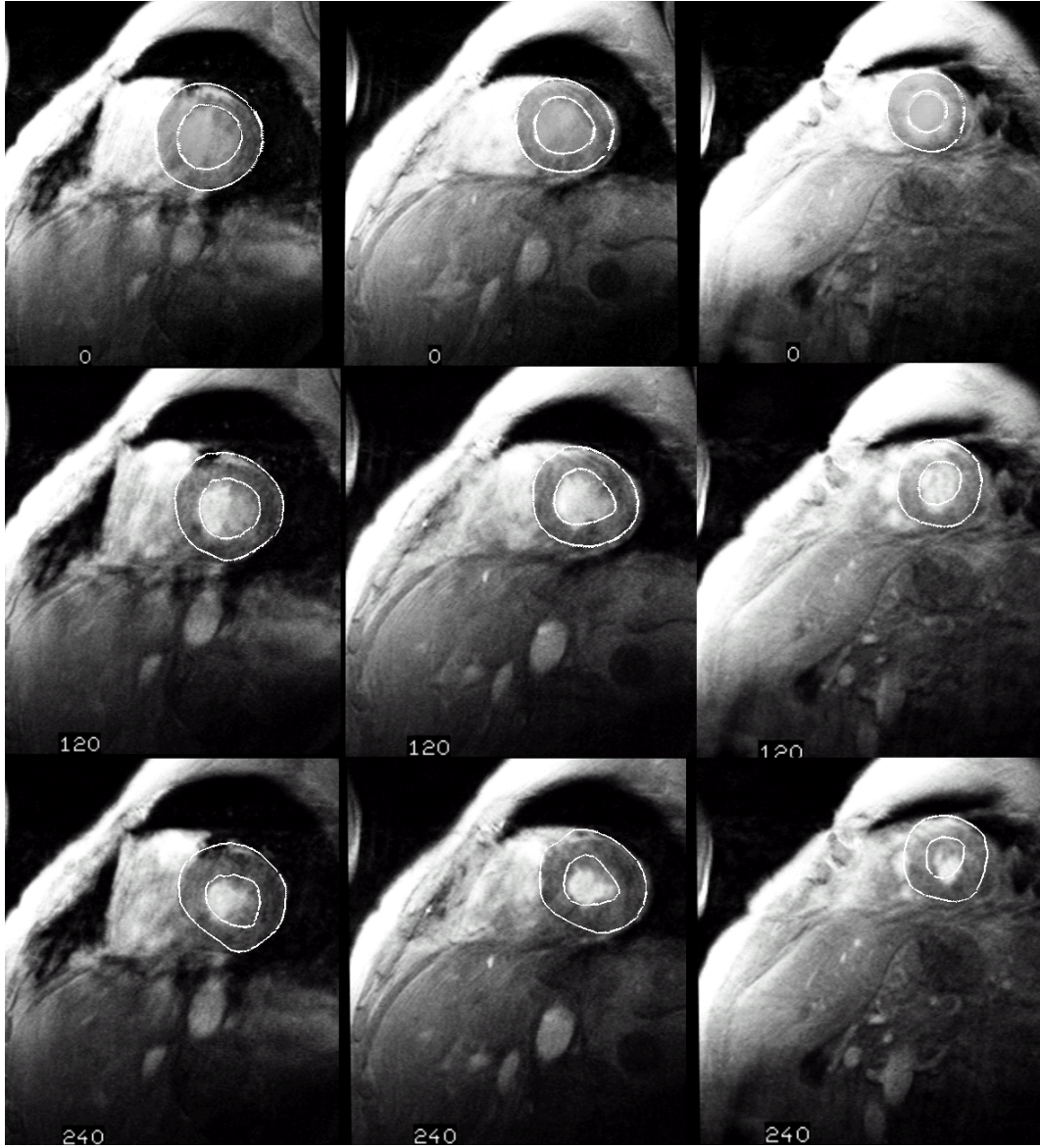


FIG. 5.9 – Résultats de la segmentation du cas P1 sur 3 niveaux de coupe (niveau le plus basal à gauche, niveau apical à droite), et à trois instants du cycle (télé-diastole, mi-systole, télé-systole, de haut en bas). Les paramètres sont $E = 0.5$, $\nu = 0$, $\gamma_1 = 0.1$.

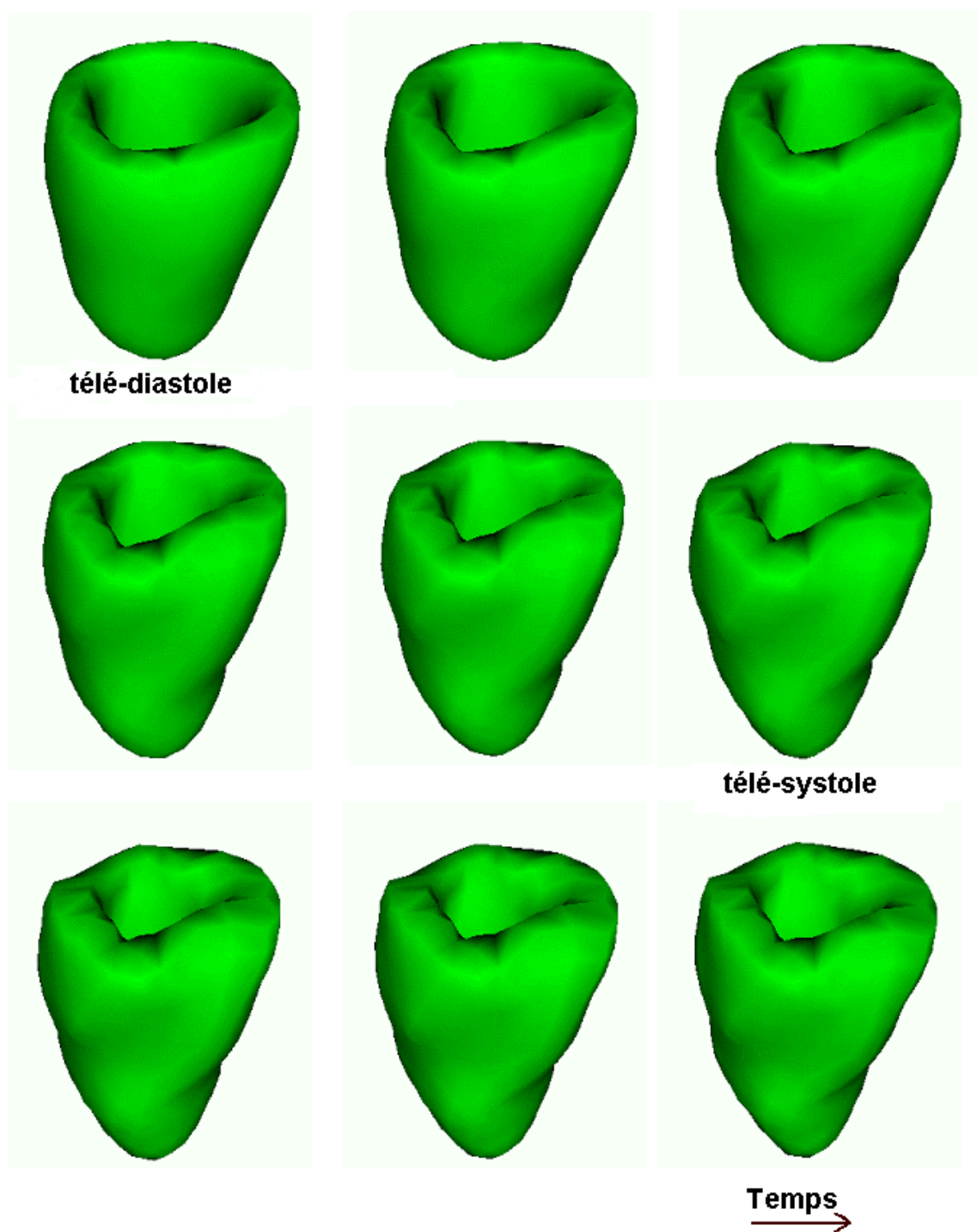


FIG. 5.10 – Segmentation 3D des 9 phases de la séquence IRM du cas P1.

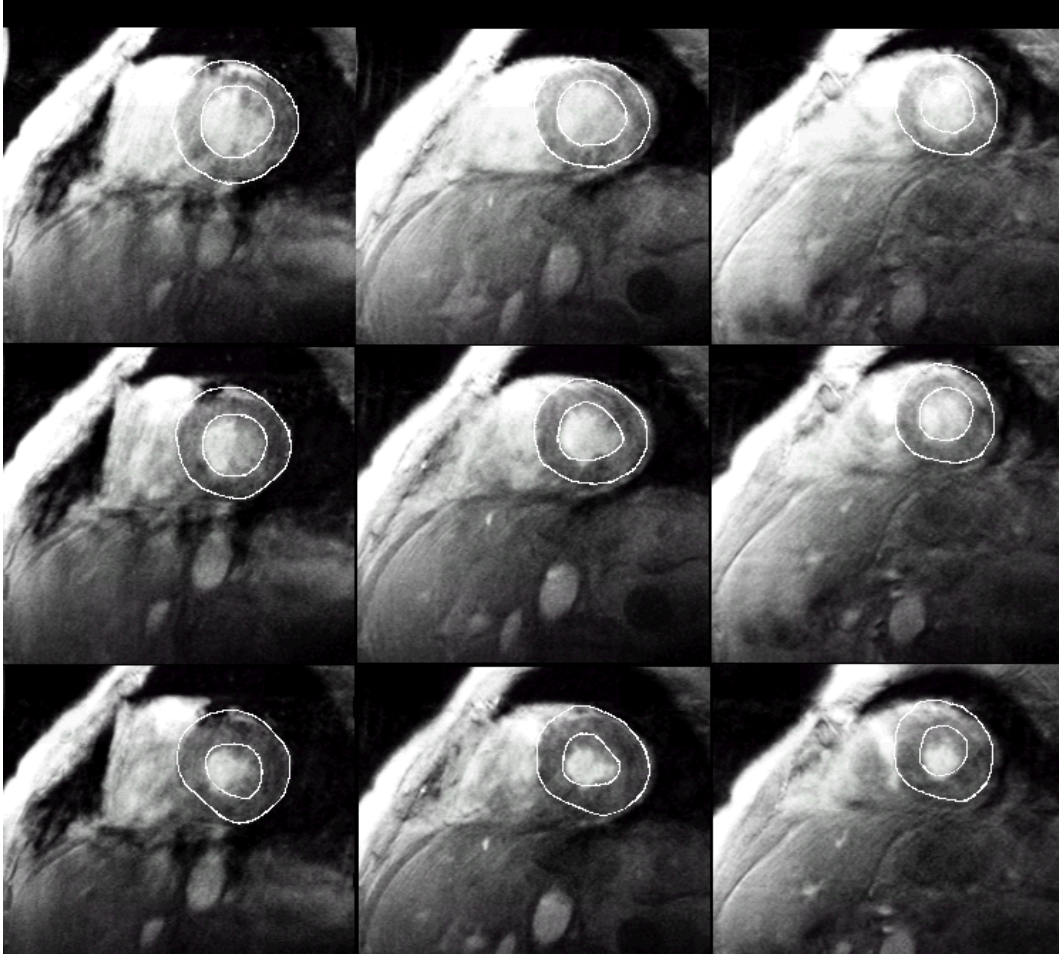


FIG. 5.11 – Résultats de la segmentation du cas P1 avec une énergie externe obtenue à partir d'un filtrage de Canny-Deriche (**B**). Les paramètres sont $E = 0.5, \nu = 0, \gamma_1 = 0.1$.

basée sur le GVF permet une meilleure adaptation locale du modèle mais son effet reste cependant limité puisque calculée en 2D sur chaque niveau de coupe. Notons que par endroit, le modèle est attiré par des bords de structures extra-myocardiques.

5.4 Discussion

Nous avons présenté dans ce chapitre une sélection d'exemples d'applications du modèle déformable proposé en imagerie par RM cardiaque. Le principe d'un tel modèle est générique et l'on peut envisager de l'appliquer à l'extraction d'objets de formes variées et complexes pour peu que l'on soit capable d'en construire une représentation maillée en volume.

D'un point de vue pratique, la qualité de la segmentation repose, comme pour les contours actifs, sur l'initialisation et la définition de l'énergie externe. L'expérience a montré qu'une initialisation plus éloignée de la cible peut être compensée par des champs

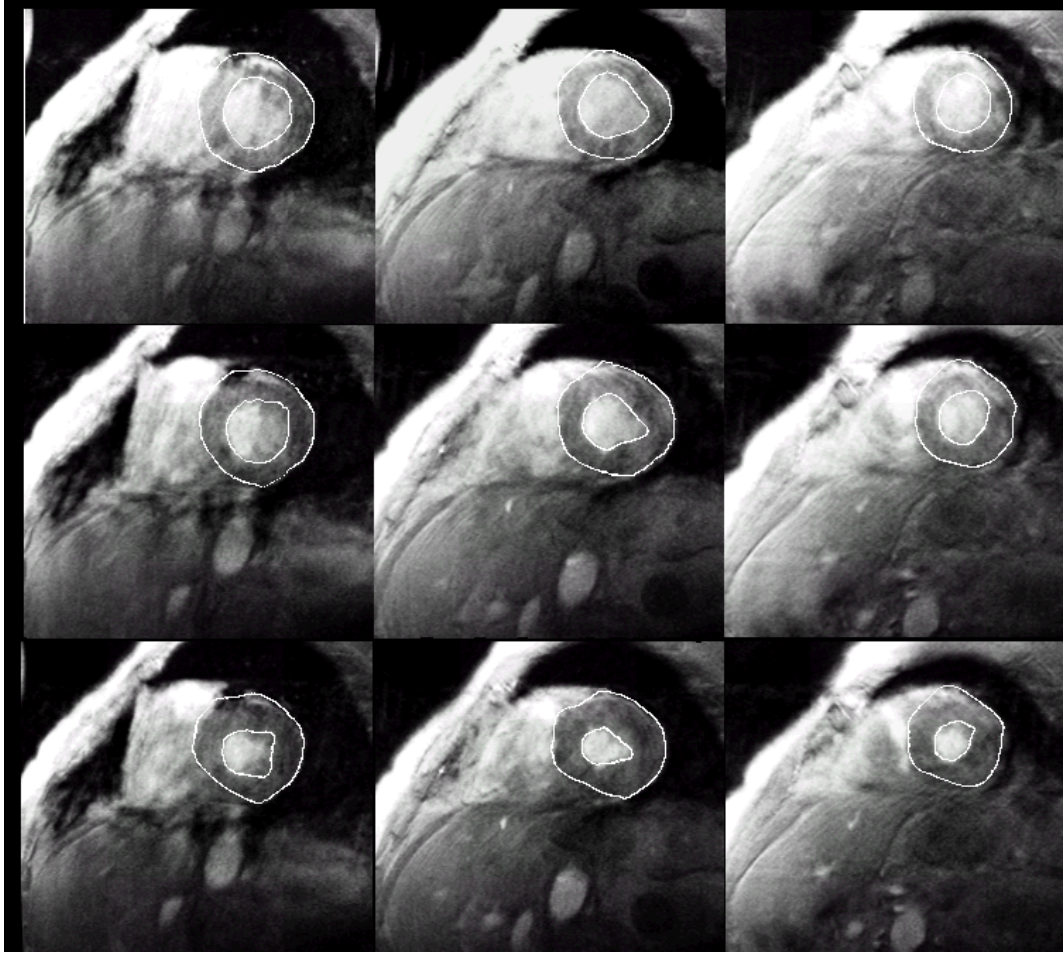


FIG. 5.12 – Résultats de la segmentation du cas P1 avec une énergie externe obtenue à partir de l'algorithme GVF (**E**). Les paramètres sont $E = 0.5, \nu = 0, \gamma_1 = 0.1$.

de force à longue portée de type GVF (type **D** ou **E**). Nous avons constaté également que la détection de mauvais contours dans la phase bas niveau de construction du champ de force externe peut attirer le modèle. Il y a donc lieu de prévoir des procédures de sélection des bords pertinents. Les paramètres de la méthode sont le module d'Young, le coefficient de Poisson, le coefficient pondérant l'énergie externe et les paramètres relatifs à l'énergie externe. Dans les exemples présentés, ils ont été définis de manière empirique. Les mêmes paramètres sont appliqués pour des séquences de même type.

Nous avons également illustré en 2D l'intérêt de l'ajout de modes sélectionnés qui permet d'améliorer la qualité des résultats pour le suivi. Il serait intéressant d'identifier, par une phase d'apprentissage, les modes les plus significatifs afin de calibrer le modèle.

Dans le cas 3D multicoupes, la répartition des contraintes suit la disposition des coupes en petit axe. Il en résulte une absence de contraintes selon la direction du grand axe qui est visible sur la séquence de maillages de la figure 5.10 : on peut en effet constater qu'il n'y a quasiment pas de mouvement dans cette direction. Or d'après la physiologie cardiaque, nous savons que le coeur subit un mouvement longitudinal significatif qui abaisse le plan basal d'environ 10 mm. Pour rendre compte de ce mouvement, il sera nécessaire d'intégrer des coupes en grand axe.

Le méthode de segmentation mise en oeuvre dans ce chapitre est par ailleurs en cours de validation dans le cadre d'une étude clinique multicentrique.

Chapitre 6

Extension du modèle intégrant la texture

L'imagerie par Résonance Magnétique de marquage tissulaire (tagged MRI) est une technique d'imagerie dédiée à l'évaluation de la fonction contractile du coeur [ZPRY88]. Elle fournit des images dans lesquelles on peut suivre les mouvements du muscle cardiaque par l'intermédiaire d'un marquage (figure 6.1).

Nous proposons dans ce chapitre une méthode d'estimation du mouvement d'un objet déformable texturé, qui peut être utilisée pour ce type d'imagerie [VCCM00a]. L'originalité de la méthode que nous proposons est de combiner deux approches :

- le suivi des contours de l'objet par une technique de *snake*
- l'estimation d'un champ dense de déplacement à l'intérieur de l'objet par une technique de mise en correspondance pixels à pixels des images avec régularisation par une énergie élastique

Nous rappelons brièvement les principes de ces deux approches avant de montrer comment les combiner.

6.1 Suivi de contour par *snake*

Un *snake* [KWT87] est une courbe paramétrique $C : \mathbf{x}(s) = (x(s), y(s))^t$ qui se déforme dans le plan image pour minimiser une fonctionnelle d'énergie E_s appelée *énergie du snake* :

$$E_s = \underbrace{\int_C \left| \frac{\partial^2 \mathbf{x}(s)}{\partial s^2} \right|^2 ds}_{E_{si}} + \lambda_{se} \underbrace{\int_C P(\mathbf{x}(s)) ds}_{E_{se}} \quad (6.1)$$

où E_{si} est l'énergie interne (avec uniquement le terme de flexion) et E_{se} l'énergie externe calculée à partir d'un champ de potentiel dont les minima locaux sont situés sur les contours de l'image (voir [CC93] pour une étude des différentes techniques de calcul de ce champ de potentiel). La minimisation de cette énergie conduit à ajuster la courbe

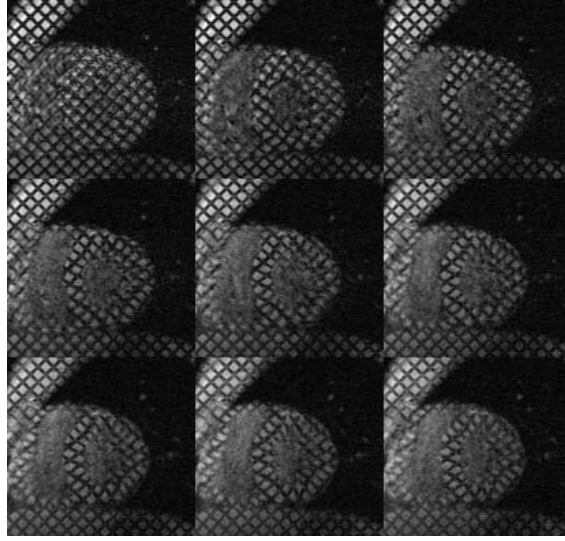


FIG. 6.1 – IRM de marquage tissulaire : cycle cardiaque vu en coupe petit axe (9 phases, de la télé-diastole, en haut à gauche, à la diastole, en bas à droite).

paramétrique aux contours présents dans l'image tout en préservant sa régularité. Le principe du suivi d'objets déformables dans une séquence d'images à partir d'un *snake* est simple : la courbe obtenue dans une image est utilisée comme courbe initiale dans l'image suivante et le processus de minimisation est itéré [LL93].

Dans l'application qui nous intéresse, nous souhaitons imposer une contrainte plus forte sur la forme des contours de l'objet. C'est pourquoi nous utiliserons la version modifiée de l'énergie d'un *snake* que nous avons proposée (voir section 4.2) et qui permet de définir un gabarit déformable dont la position d'équilibre peut être une courbe particulière (et non un point comme dans le *snake* classique) :

$$E'_{si} = \int_C \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}(s)}{\partial s^2} \right|^2 ds \quad (6.2)$$

6.2 Estimation d'un champ de déplacement avec régularisation élastique

Notations

- I_1 et I_2 : les deux images, dans un même système de coordonnées
- \mathbf{x} : coordonnées d'un point dans le repère des images.
- $I_1(\mathbf{x})$, $I_2(\mathbf{x})$: fonctions d'intensité associées aux images (fonctions continues, ce qui suppose qu'on utilise une fonction d'interpolation pour obtenir les valeurs entre les pixels).
- $\mathbf{u}(\mathbf{x})$: déplacement du point matériel situé en \mathbf{x} dans l'image I_1 . Les coordonnées

- de ce point matériel dans l'image I_2 sont : $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$
- A_1 : région d'intérêt dans l'image I_1 (c'est-à-dire région dans laquelle on estime le déplacement).

L'estimation d'un champ dense de déplacement, entre deux images, d'un objet en déformation est souvent transcrite en un problème de minimisation d'une énergie E_r ("r" comme *région*). Comme pour les modèles déformables, cette énergie est la somme d'une énergie externe E_{re} qui mesurera l'adéquation du champ de déplacement obtenu aux données (les 2 images) et un terme d'énergie interne E_{ri} qui mesurera la régularité du champ obtenu et permettra d'une part de résoudre le problème d'ouverture et d'autre part de rendre l'estimation robuste au bruit.

$$E_r(\mathbf{u}) = E_{ri}(\mathbf{u}) + \lambda_{re} E_{re}(\mathbf{u}) \quad (6.3)$$

6.2.1 Choix de l'énergie externe

Nous faisons l'hypothèse que les pixels de l'objet conservent leur valeur durant le mouvement. En supposant que l'on connaît le champ de déplacement, cette hypothèse se traduit par la relation :

$$DFD(\mathbf{x}) = I_1(\mathbf{x}) - I_2(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = 0 \quad \text{pour } \mathbf{x} \in A_1 \quad (6.4)$$

où DFD désigne la *différence déplacée*, en anglais *Displaced Frame Difference*.

Par conséquent, une mesure de la qualité du champ de déplacement estimé, compte tenu des données, est l'intégrale sur la région d'intérêt du carré de la DFD [Pla99] :

$$E_{re}(\mathbf{u}) = \int_{A_1} (I_1(\mathbf{x}) - I_2(\mathbf{x} + \mathbf{u}))^2 dA_1 \quad (6.5)$$

Pour rendre cette mesure plus robuste au bruit dans les images, on peut lisser ces dernières avec un filtre gaussien avant d'effectuer la différence. C'est ce que nous ferons systématiquement dans les expériences décrites dans la suite de ce chapitre (avec un filtre gaussien de variance égale à 2).

6.2.2 Choix de l'énergie interne

Nous définissons l'énergie interne comme étant l'énergie élastique de l'objet délimité par la région d'intérêt A_1 (cf. chapitre 3)

$$E_{ri}(\mathbf{u}) = \int_{A_1} \sigma^t \boldsymbol{\varepsilon} dA_1 \quad (6.6)$$

L'emploi de l'énergie élastique comme énergie de régularisation dans l'estimation d'un champ de déplacement, a été proposé par plusieurs auteurs [BK89, DD96, FWG⁺99].

6.3 Combinaison des deux techniques

Les deux techniques que nous avons présentées sont complémentaires puisqu'elles traitent chacune une partie du problème de l'estimation du champ de déplacement d'un objet déformable :

- le suivi avec un *snake* ne permet d'obtenir qu'une information limitée aux interfaces de l'objet et qui ne prend pas en compte d'éventuels mouvements tangentiels aux contours (problème d'ouverture). Par contre, cette information ne repose pas sur une hypothèse quelconque de conservation des intensités d'une image à l'autre. Le suivi des intensités permet en revanche d'estimer un champ dense sur l'objet, et peut éventuellement lever les ambiguïtés liées au problème d'ouverture (cela dépend de la texture de l'objet). Le champ estimé peut être, par contre, imprécis aux interfaces de l'objet si l'intensité du fond de l'image n'est pas constante.
- La mise en oeuvre numérique (voir plus loin) du suivi des intensités suppose le plus souvent que les déplacements entre les deux images sont faibles. Les “snakes” peuvent permettre d'estimer des déplacements plus importants, par le biais d'une énergie externe à “longue portée” (ex : carte de distance).

Pour combiner les propriétés de ces deux techniques, nous définissons un nouveau modèle déformable dont l'énergie totale est la somme pondérée des énergies E_s et E_r :

$$E = \lambda_{re} E_{re} + E_{ri} + \lambda(\lambda_{se} E_{se} + E'_{si}) \quad (6.7)$$

On définit alors les énergies interne et externe du nouveau modèle (qui inclut les constantes de pondération) :

$$E_i = E_{ri} + \lambda E'_{si} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{A_1} \sigma^t \boldsymbol{\varepsilon} dA_1 + \lambda \int_C \left| \frac{\partial^2 \mathbf{u}(s)}{\partial s^2} \right|^2 ds \\ E_e &= \lambda_{re} E_{re} + \lambda \lambda_{se} E_{se} \\ &= \int_{A_1} (I_1(\mathbf{x}) - I_2(\mathbf{x} + \mathbf{u}))^2 dA_1 + \lambda \lambda_{se} \int_C P(\mathbf{x} + \mathbf{u}) ds \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le principe du modèle ainsi défini est illustré par la figure 6.2.

6.4 Discrétisation de l'énergie du modèle

- Énergie interne

Nous utilisons la méthode des éléments finis pour discrétiser l'énergie interne de région (cf. section 3.2). Nous obtenons l'expression matricielle suivante :

$$E_{ri} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K}_{ri} \mathbf{U} \quad (6.10)$$

où $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1^t, \dots, \mathbf{u}_N^t)^t$ est le vecteur des déplacements aux noeuds et \mathbf{K}_{ri} la matrice de raideur.

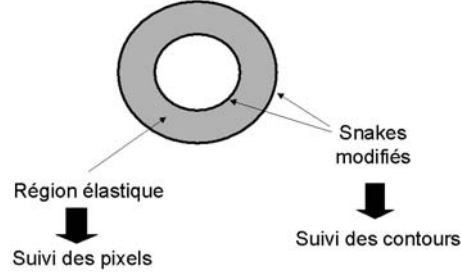


FIG. 6.2 – Modèle combiné

Nous utilisons la méthode des différences finies pour discrétiser l'énergie interne de *snake* (cf. section 4.2.2 , équation 4.35) :

$$E_{si} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K}_{si} \mathbf{U} \quad (6.11)$$

- Énergie externe

Nous effectuons d'abord un développement limité au premier ordre de l'intensité I_2 pour obtenir une approximation quadratique du carré de la DFD :

$$\begin{aligned} DFD^2 &= (I_2(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - I_1(\mathbf{x}))^2 \\ &\simeq (I_2(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^t \nabla I_2 - I_1(\mathbf{x}))^2 \\ &\simeq \Delta I^2 + 2\Delta I \mathbf{u}^t \nabla I_2 + (\mathbf{u}^t \nabla I_2)^2 \\ &\simeq \Delta I^2 + 2\Delta I \mathbf{u}^t \nabla I + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{H} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (6.12)$$

avec les notation suivantes :

$$\Delta I = I_2(\mathbf{x}) - I_1(\mathbf{x}) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{H} = 2\nabla I_2 \nabla I_2^t \quad (6.14)$$

La région d'intérêt est maillée en triangles et nous discrétisons l'énergie externe de région par la MEF, en introduisant des fonctions de base linéaires définies sur les éléments triangulaires ($\Phi_l(\mathbf{x})$, $1 \leq l \leq 3$, cf. section 3.2). Nous obtenons une expression matricielle de l'énergie externe de région :

$$E_{re}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \simeq E_{re}(\mathbf{x}) + \mathbf{U}^t \mathbf{F}_{re} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K}_{re} \mathbf{U} \quad (6.15)$$

où \mathbf{K}_{re} et \mathbf{F}_{re} sont respectivement construits par assemblage de matrices de raideur élémentaires \mathbf{K}^e et de vecteurs de force élémentaires \mathbf{F}^e , c'est-à-dire calculés sur chaque élément triangulaire. En reprenant les notations de la section 3.2, les éléments de \mathbf{K}^e ont pour expression :

$$\mathbf{K}_{lm}^e = \int_{\Omega_e} \Phi_l^t(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}) \Phi_m(\mathbf{x}) d\Omega_e \quad 1 \leq m, l \leq 4 \quad (6.16)$$

Les éléments du vecteur force \mathbf{F}^e ont pour expression :

$$\mathbf{F}_l^e = \int_{\Omega_e} 2\Delta I \Phi_l^t(\mathbf{x}) \nabla I_2 d\Omega_e \quad 1 \leq l \leq 4 \quad (6.17)$$

Le calcul des intégrales sur chaque élément est effectué en utilisant une approximation numérique de la forme :

$$\int_{\Omega_e} g(\mathbf{x}) d\Omega_e = \sum_{k=1}^{n_e} g(\mathbf{x}_k) w_k \quad (6.18)$$

où n_e est le nombre de points d'échantillonnage \mathbf{x}_k et w_k un coefficient de pondération. Nous renvoyons à la référence [ZT91] pour plus de détails.

Pour l'énergie externe de contour E_{se} , nous effectuons un développement à l'ordre 2 du potentiel :

$$P(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = P(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^t \nabla P + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \mathbf{H}_p \mathbf{u} \quad (6.19)$$

où \mathbf{H}_p est la matrice hessienne du potentiel P . En utilisant la MEF, nous obtenons l'approximation suivante de l'énergie E_{se} :

$$E_{se}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) \simeq E_{se}(\mathbf{x}) + \mathbf{U}^t \mathbf{F}_{se} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K}_{se} \mathbf{U} \quad (6.20)$$

- Bilan global

Nous obtenons finalement une approximation quadratique discrète de l'énergie du modèle :

$$E(\mathbf{U}) \simeq E_0 + \mathbf{U}^t \mathbf{F} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (6.21)$$

avec :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{se} + \mathbf{F}_{re} \quad (6.22)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{si} + \mathbf{K}_{ri} + \mathbf{K}_{se} + \mathbf{K}_{re} \quad (6.23)$$

Pour la suite des calculs, nous introduisons les deux matrices suivantes :

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{si} + \mathbf{K}_{ri} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_{se} + \mathbf{K}_{re} \quad (6.25)$$

6.5 Minimisation de l'énergie du modèle

Le minimum de l'approximation quadratique de l'énergie du modèle est obtenu pour le vecteur déplacement \mathbf{U}_1 qui en annule les dérivées premières, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_1 = \mathbf{F} \quad (6.26)$$

Compte tenu des approximations faites pour calculer l'énergie externe, le vecteur \mathbf{U}_1 ne correspond certainement pas au minimum de l'énergie totale. Il constitue cependant une première évaluation que nous pouvons chercher à préciser en calculant un terme correctif $\delta\mathbf{U}_1$. Nous voyons en fait se dessiner un schéma de minimisation itératif reposant sur le calcul d'une approximation quadratique de l'énergie au point courant.

Soit donc \mathbf{U}_k le déplacement estimé à la k -ième itération. Nous cherchons à estimer un terme correctif $\delta\mathbf{U}_k$ pour obtenir $\delta\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{U}_k + \delta\mathbf{U}_k$. Nous calculons l'approximation quadratique de l'énergie au voisinage de \mathbf{U}_k .

Pour la composante réellement quadratique de l'énergie, c'est-à-dire l'énergie interne, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_i(\mathbf{U}_k + \delta\mathbf{U}_k) &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}_k + \delta\mathbf{U}_k)^t \mathbf{K}_i (\mathbf{U}_k + \delta\mathbf{U}_k) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{U}_k^t \mathbf{K}_i \mathbf{U}_k + \frac{1}{2}\mathbf{U}_k^t \mathbf{K}_i \delta\mathbf{U}_k + \frac{1}{2}\delta\mathbf{U}_k^t \mathbf{K}_i \mathbf{U}_k + \frac{1}{2}\delta\mathbf{U}_k^t \mathbf{K}_i \delta\mathbf{U}_k \end{aligned}$$

La matrice \mathbf{K}_i étant symétrique par construction, nous avons la relation $\delta\mathbf{U}_k^t \mathbf{K}_i \mathbf{U}_k = \mathbf{U}_k^t \mathbf{K}_i \delta\mathbf{U}_k$, et nous pouvons écrire :

$$E_i(\mathbf{U}_k + \delta\mathbf{U}_k) = E_i(\mathbf{U}_k) + \delta\mathbf{U}_k^t \mathbf{K}_i \mathbf{U}_k + \frac{1}{2}\delta\mathbf{U}_k^t \mathbf{K}_i \delta\mathbf{U}_k \quad (6.27)$$

Le calcul d'une approximation quadratique de l'énergie externe est obtenu en utilisant des développements limités de la DFD et du potentiel P autour de $\mathbf{U} = \mathbf{U}_k$. En reprenant les calculs que nous avons menés précédemment pour $\mathbf{U} = \mathbf{0}$, nous obtenons cette fois-ci l'approximation suivante :

$$E_e(\mathbf{U}_k + \delta\mathbf{U}_k) \simeq E_e(\mathbf{U}_k) + \delta\mathbf{U}_k^t \mathbf{F}_e + \frac{1}{2}\delta\mathbf{U}_k^t \mathbf{K}_e^k \delta\mathbf{U}_k \quad (6.28)$$

La matrice \mathbf{K}_e^k est l'équivalent, pour la position courante $\mathbf{U} = \mathbf{U}_k$ de la matrice \mathbf{K}_e que nous avons calculée en $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ à la section précédente. L'exposant k repère le numéro de l'itération.

Le minimum de l'approximation quadratique est obtenu pour la correction $\delta\mathbf{U}_k$ du déplacement \mathbf{U}_k qui en annule les dérivées premières, c'est-à-dire qui vérifie :

$$(\mathbf{K}_e^k + \mathbf{K}_i)\delta\mathbf{U}_k = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i - \mathbf{K}_i \mathbf{U}_k \quad (6.29)$$

6.6 Résultats

6.6.1 Expérimentation sur des images de synthèse

Nous avons généré deux images simulant la déformation d'un ventricule gauche de coeur avec un marquage en grille (figure 6.3). Le mouvement de déformation est calculé à partir d'un modèle de déformation du coeur [O'D95], et par conséquent le champ de déplacement réel, noté \mathbf{u}_r est connu. Pour évaluer la robustesse de l'algorithme au bruit dans les images, nous avons dégradé les images précédentes avec deux types de bruit : un bruit blanc gaussien et un bruit multiplicatif (de type speckle). Pour mesurer le niveau de bruit que nous introduisons, nous utilisons le *rapport-signal-à-bruit* (SNR). Si l'on note $I(i, j)$ l'image originale et $I'(i, j)$ l'image dégradée, le SNR est défini par :

$$SNR = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} I(i, j)^2}}{\sqrt{\sum_{i,j} (I(i, j) - I'(i, j))^2}} \quad (6.30)$$

Par ailleurs, les évaluations que nous faisons reposent sur une hypothèse : nous supposons que nous disposons d'un filtre permettant d'extraire avec précision les contours binaires de l'objet dans I_2 . C'est évidemment une hypothèse très restrictive, puisque sur des images de RM marquées par exemple, la détection des contours du VG est un problème difficile. Cette hypothèse reste raisonnable si l'on considère que notre objectif est dans un premier temps de valider le principe de la méthode, c'est-à-dire le principe de la coopération du suivi de contour et du suivi de pixels.

Les figures 6.3, 6.4 et 6.5, présentent les résultats de l'estimation du déplacement sur les images sans bruit et avec deux types de bruit. L'évaluation des résultats est faite de plusieurs manière :

- On construit une image transformée par application du champ de déplacement estimé sur la région d'intérêt de I_1 . On peut alors comparer visuellement cette image avec I_2 qui dans le meilleur des cas doivent être identiques.
- On calcule l'erreur d'estimation, c'est-à-dire le champ de vecteur $\mathbf{e} = \mathbf{u}_r - \mathbf{u}_e$ où \mathbf{u}_r est le champ de déplacement réel et \mathbf{u}_e le champ estimé par l'algorithme. Pour quantifier l'erreur, nous utilisons aussi la valeur moyenne m_e et l'écart-type σ_e de la norme de ce champ.

La moyenne et l'écart-type de l'erreur sont très inférieurs au pixel, même en présence de bruit, pour un déplacement théorique de plusieurs pixels en moyenne. Ces résultats mettent en évidence d'une part la précision de la méthode, et d'autre part sa robustesse au bruit.

Les paramètres du modèle ($E, \nu, \lambda, \lambda_{re}, \lambda_{se}$) ont été déterminés empiriquement.

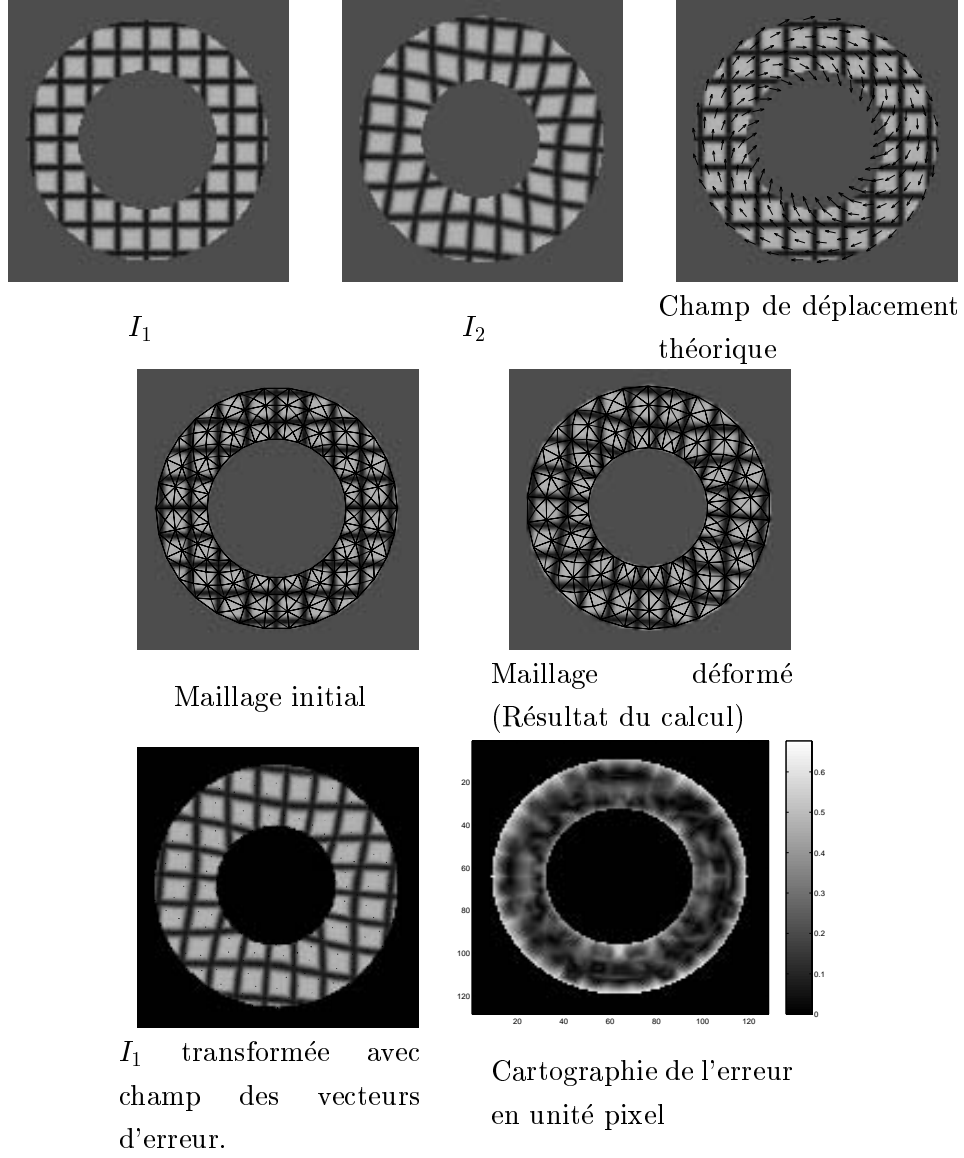


FIG. 6.3 – Résultat du suivi sur des images de synthèse. Les paramètres du modèle sont : $E = 0.1$, $\nu = 0$, $\lambda = 1.2$, $\lambda_{re} = 30$, $\lambda_{se} = 0.8$. La moyenne et l'écart-type de l'erreur sont tous deux égaux à 0.2 pixels.

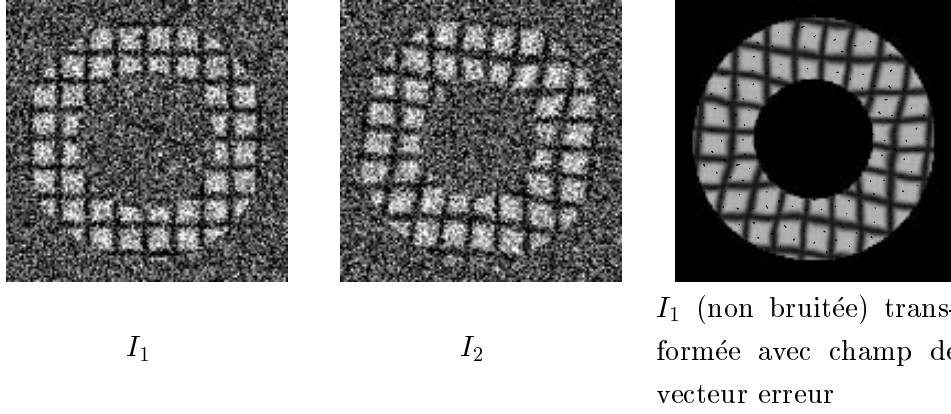


FIG. 6.4 – Résultat du suivi sur des images bruitées (bruit blanc gaussien : $m_b = 0$, $\sigma_b = 0.22$, $SNR = 1.86$). La moyenne et l'écart-type sont, respectivement, $m_e = 0.55$ pixels et $\sigma_e = 0.28$ pixels. Les paramètres du modèle sont identiques à ceux des tests sans bruit.

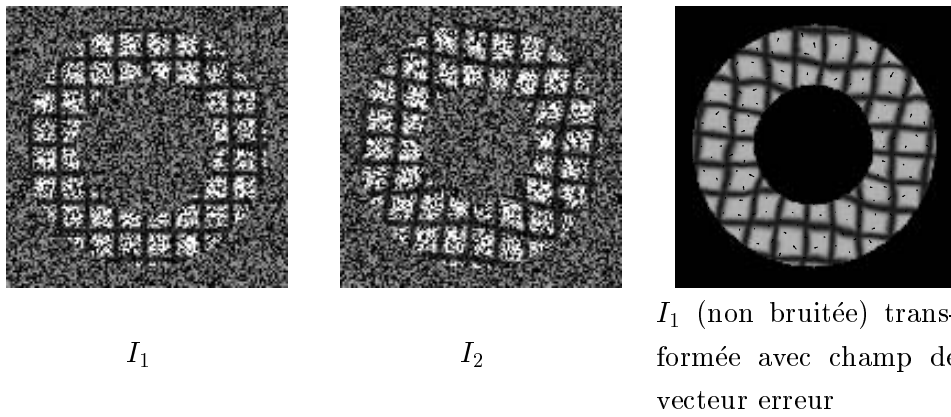


FIG. 6.5 – Résultat du suivi sur des images bruitées (bruit speckle , $SNR = 1.58$). La moyenne et l'écart-type sont, respectivement, $m = 0.8$ pixels et $\sigma = 0.4$ pixels. Les paramètres du modèle sont identiques à ceux des tests sans bruit.

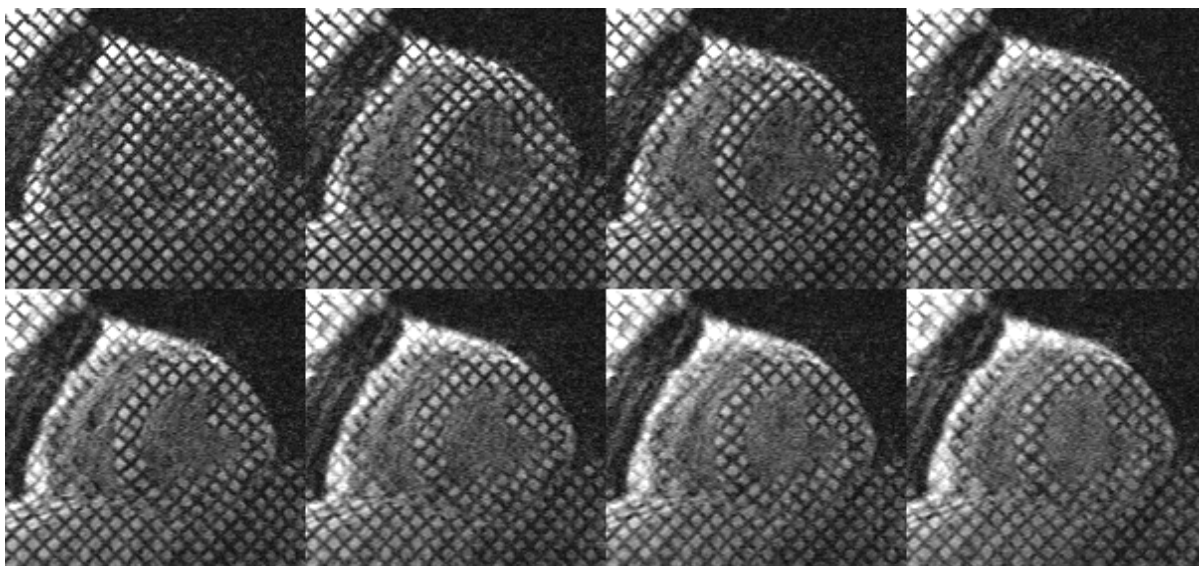


FIG. 6.6 – Séquence temporelle d’images de marquage tissulaire utilisée pour le test.

6.6.2 Application à l’IRM de marquage tissulaire

Nous avons appliqué l’algorithme d’estimation de mouvement à une séquence de 8 images ($t=1$ à $t=8$) obtenues par IRM de marquage tissulaire (figure 6.6). La figure (6.7) met en évidence les entrées et sorties de l’algorithme. En plus de la séquence d’images, nous utilisons une séquence de contours (endocarde et épicarde, figure 6.8) obtenue de manière semi-automatique grâce au logiciel FINDTAGS [GPM94]. C’est à partir de celle-ci que nous construisons l’énergie externe de contour. Les contours à l’instant $t = 1$ nous permettent également de définir la région du myocarde sur laquelle nous effectuons le calcul du champ de déplacement. L’algorithme estime successivement le champ de déplacement entre deux images consécutives. Il fournit donc, pour chaque instant, les déplacements des noeuds du maillage initial, que nous visualisons par la séquence des maillages déformés (figure 6.9), ainsi que sous forme de trajectoires (figure 6.10)

Afin d’évaluer qualitativement les performances de la méthode, nous calculons les positions successives des points des lignes de marquage de l’instant $t=1$ (obtenues par FINDTAGS), par application des champs de déplacement estimés. Nous obtenons ainsi des lignes de marquage déformées que nous superposons d’une part aux images (figure 6.12), et d’autre part, aux lignes de marquages fournies par le logiciel FINDTAGS (figure 6.13).

La figure 6.10 montre la trajectoire des noeuds du maillage au cours du cycle cardiaque. Un examen en TEP a montré que ce coeur présente une nécrose apicale de la paroi inférieure et une nécrose basale de de la paroi septale, ce qui peut expliquer les faibles déformation observées notamment dans la partie supérieure gauche de la figure.

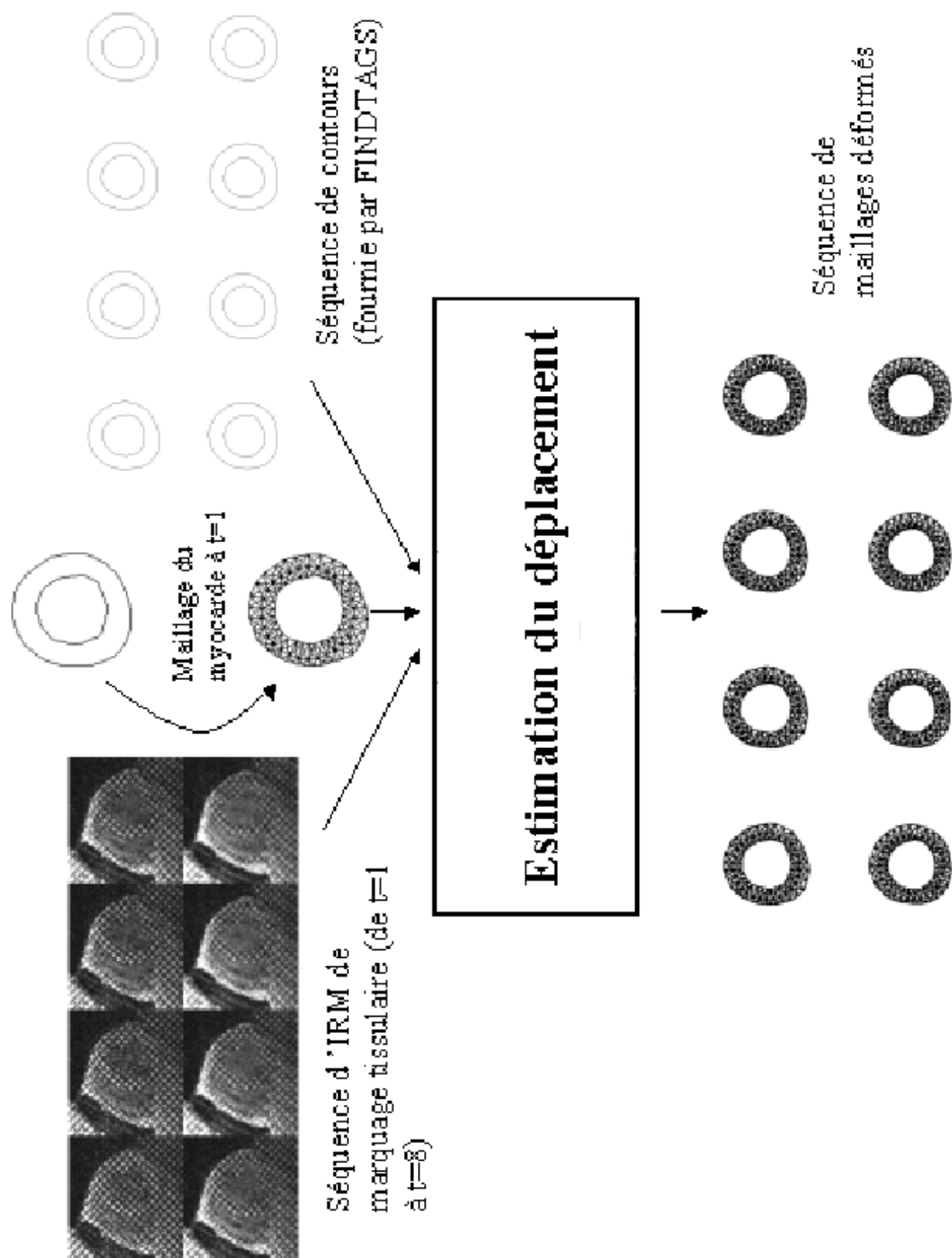


FIG. 6.7 – Schéma Entrée-Sortie de l'algorithme d'estimation du champ de déplacement sur une séquence d'images de marquage tissulaire.

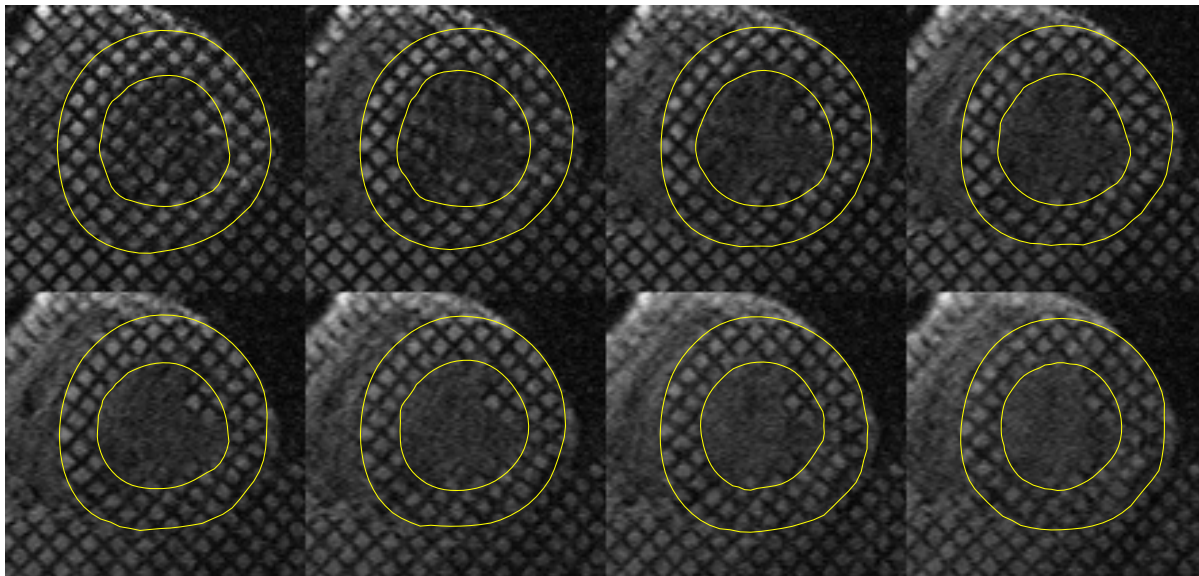


FIG. 6.8 – Séquence de contours fournie par FINDTAGS.

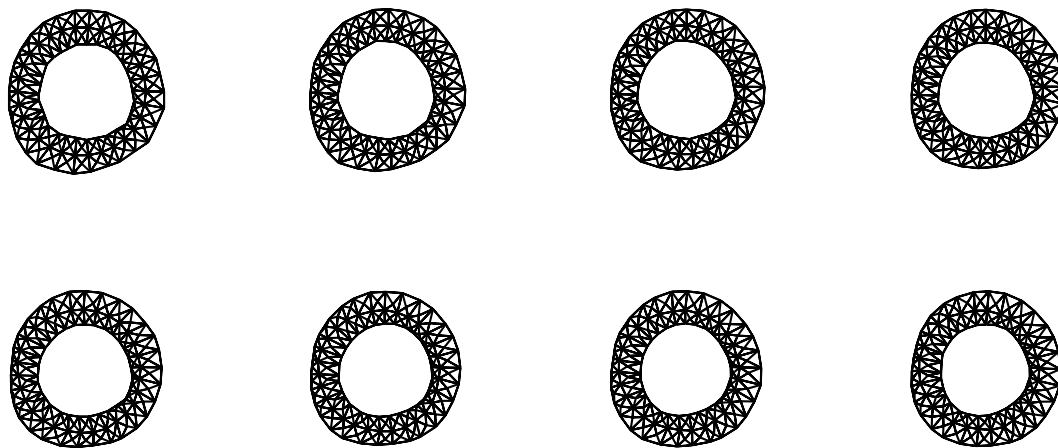


FIG. 6.9 – Séquence de maillages déformés obtenue par application de l'algorithme d'estimation du champ de déplacement.

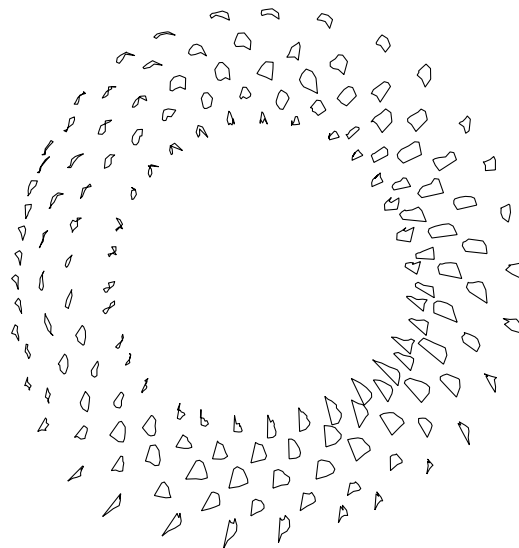


FIG. 6.10 – Trajectoires des noeuds du maillage au cours de la déformation.

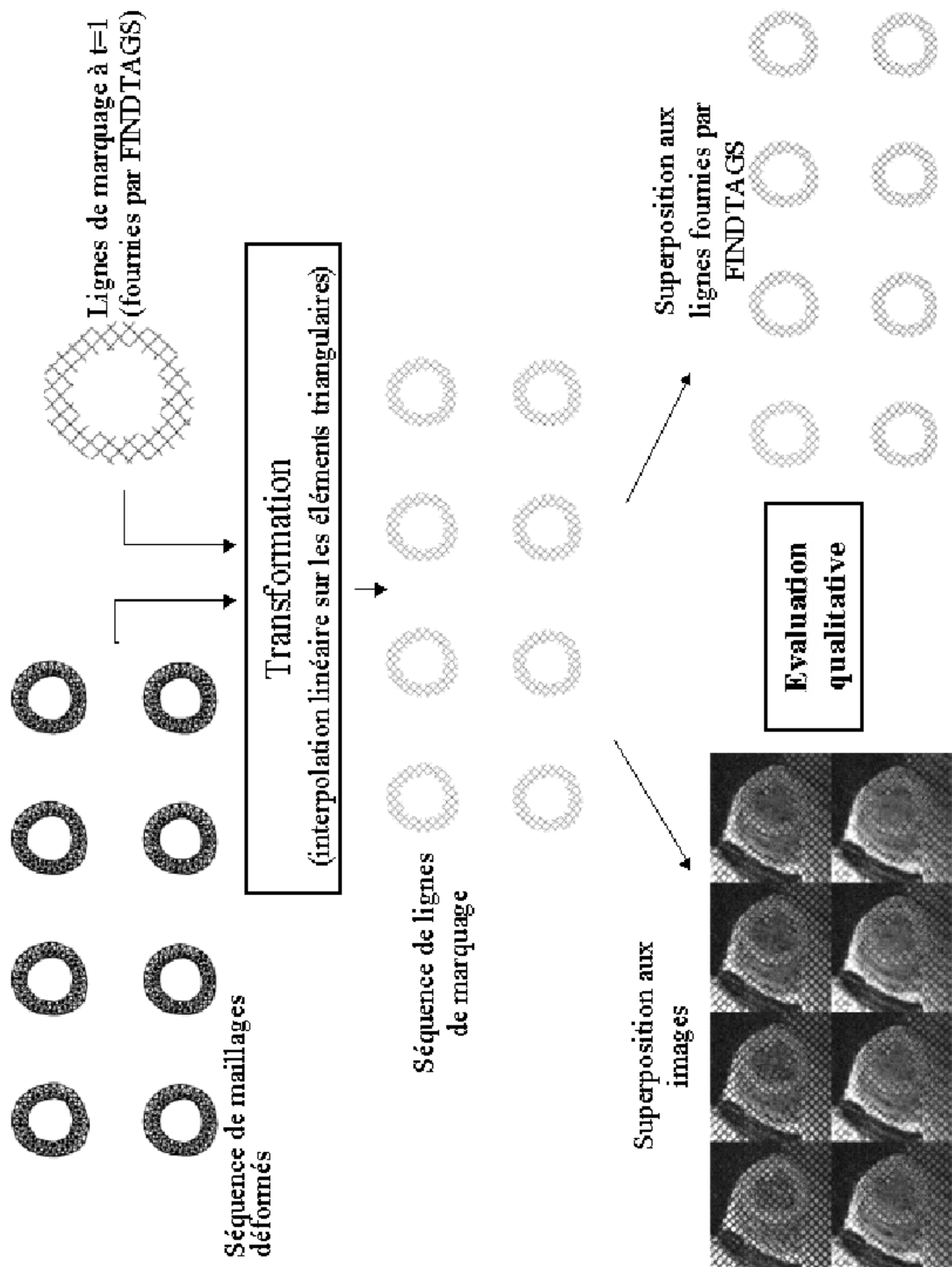


FIG. 6.11 – Méthodes d'évaluation qualitatives du champ de déplacement estimé.

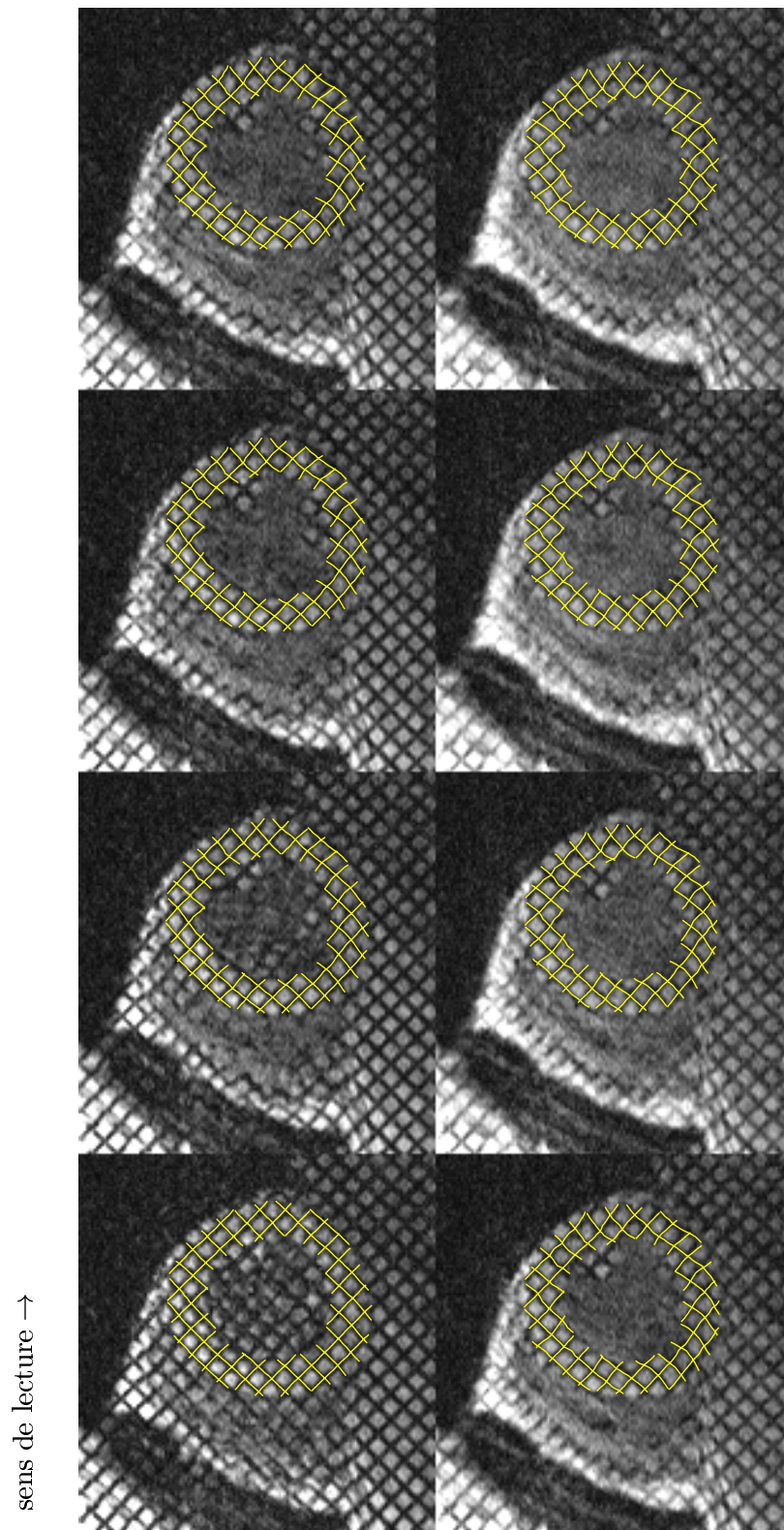


FIG. 6.12 – Evaluation qualitative du résultat (1) : superposition des lignes de marquages calculées et des images.

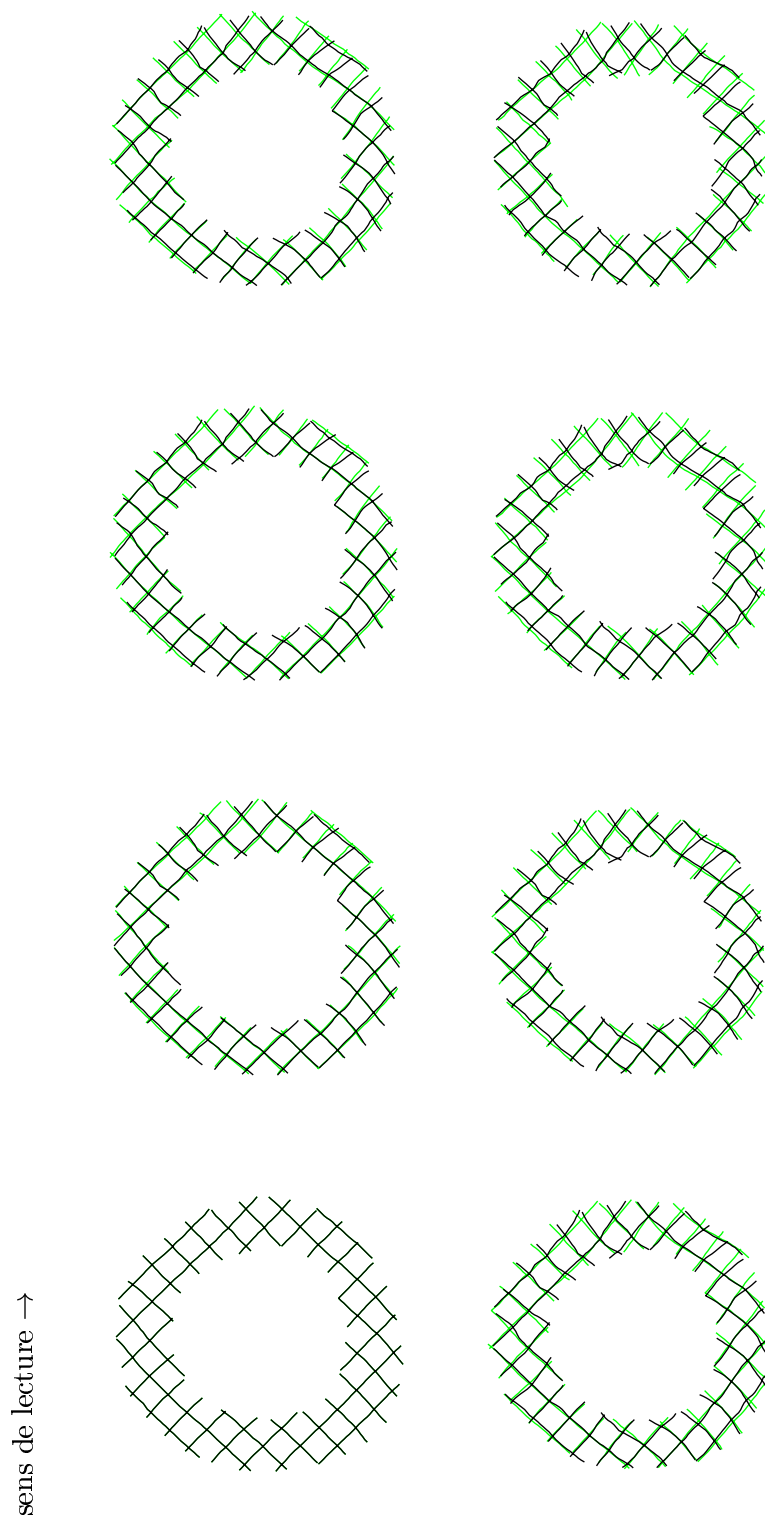


FIG. 6.13 – Evaluation qualitative du résultat (2) : superposition des lignes de marquages calculées (trait noir) et des lignes de marquages fournies par FINDTAGS (trait gris).

6.6.3 Conclusion

Les premières expérimentations destinées à évaluer notre algorithme d'estimation du champ de déplacement ont donné des résultats très satisfaisants.

Les tests menés sur des images de synthèse ont montré que l'algorithme fonctionnait correctement en présence d'un bruit qui altère la conservation de l'intensité, c'est-à-dire qui met à mal l'hypothèse qui fonde le terme d'énergie externe de région.

L'application au suivi dans une séquence d'IRM de marquage tissulaire semble montrer que le modèle théorique qui fonde l'algorithme est adapté au contenu de ce type d'images.

Pour compléter ce travail, nous envisageons d'une part de travailler sur d'autres séquences d'IRM de marquage tissulaire afin de compléter la validation de la méthode et d'étudier notamment le problème du choix des paramètres du modèle, et d'autre part d'essayer de nous affranchir de la nécessité de disposer d'une séquence de contours.

Conclusion

Nous avons proposé dans ce rapport un gabarit élastique pour la segmentation et le suivi d'objets déformables dans des séquences d'images multi-dimensionnelles. Nous l'avons appliqué à la segmentation et à l'estimation de mouvement du ventricule gauche dans des séquences d'IRM monocoupes et multicoupes. Le principe de ce modèle est générique et permet d'envisager son application au suivi d'objets de forme variée et plus complexe que celle considérée dans ce mémoire. Nous l'avons depuis étendu à la segmentation de l'ensemble ventricule droit et gauche. Les résultats très encourageants que nous avons obtenus montrent que l'approche est prometteuse et que l'effort dans cette voie mérite d'être poursuivi.

L'une des principales difficultés qui subsiste concerne le réglage des paramètres de la méthode. Une étude sur un plus grand nombre de cas doit nous permettre de définir les règles d'ajustement des paramètres. Elle est actuellement en cours, à partir d'une base d'une vingtaine d'exams acquis dans le cadre d'une étude clinique. Il est probable que cette phase de réglage soit à effectuer pour chaque application spécifique en fonction de l'objet à segmenter et des caractéristiques des images.

Un prolongement direct de ce travail consistera à mettre en oeuvre la régularisation des interfaces du modèle en 3D, que nous n'avons pas eu le temps d'aborder, sauf en théorie. Elle permettra d'améliorer la segmentation en donnant plus de liberté dans l'ajustement de l'énergie interne du modèle.

Enfin, nous pensons qu'il est important de doter ce modèle d'une capacité d'apprentissage, afin que les segmentations obtenues, éventuellement corrigées par un expert, puissent participer à l'amélioration des performances du modèle. Nous avons vu lors de l'étude bibliographique que deux types de paramètres peuvent faire l'objet d'un apprentissage : d'une part des paramètres de forme, et d'autre part des paramètres d'intensité (propres à une modalité d'image), tel que des profils d'intensité au voisinage des interfaces de la structure considéré. Il nous semble intéressant d'explorer ces deux voies.

Nous envisageons également de prendre en compte l'anisotropie du matériau myocardique. En effet, le muscle cardiaque est constitué de fibres dont l'orientation varie dans son épaisseur. Les études physiologiques ont montré l'importance de cette organisation fibreuse dans la capacité contractile du coeur. La prise en compte de cette information dans notre modèle doit permettre d'orienter la segmentation de façon plus réaliste. Dans le cadre

d'une collaboration avec un laboratoire de mathématiques appliquées, nous explorons la formalisation d'un modèle élastique non isotrope.

Enfin, l'application du gabarit élastique à des problématiques de recalage inter-modalités serait particulièrement intéressante dans le cadre de l'application à l'imagerie cardiaque puisqu'elle ouvrirait la voie à des analyses combinant, au travers de notre modèle, un ensemble de paramètres fonctionnels. Cette perspective est particulièrement attendue pour l'étude de certaines pathologies cardio-vasculaires comme l'ischémie myocardique dans laquelle notre groupe est particulièrement impliqué.

Annexe A

Approche bayésienne des modèles déformables

Un modèle déformable est caractérisé par son énergie totale $E = E_i + E_e$, et l'ajustement du modèle aux données est obtenu par minimisation de cette l'énergie.

Une alternative à ce paradigme consiste à adopter une approche statistique de ce problème d'ajustement. Le vecteur de paramètres \mathbf{c} du modèle (ou gabarit) est considéré comme un vecteur de variables statistiques. Pour des données I , la probabilité $P(\mathbf{c}|I)$ appelée *probabilité a posteriori* mesure l'adéquation du modèle à ces données. L'ajustement du modèle s'obtient en recherchant le maximum a posteriori (MAP).

Comment cette probabilité $P(\mathbf{c}|I)$ est-elle définie ? On utilise généralement la règle de Bayes qui permet de faire apparaître d'autres probabilités plus aisément modélisables :

$$P(\mathbf{c}|I) = \frac{P(I|\mathbf{c})P(\mathbf{c})}{P(I)} \quad (\text{A.1})$$

$P(I)$ est considérée comme constante. $P(\mathbf{c})$ constitue le modèle a priori. Cette probabilité doit être maximale pour les configurations du modèle susceptibles de convenir, minimale pour celles qui ne sont pas réalistes. $P(I|\mathbf{c})$ est la vraisemblance des données I compte tenu de la configuration \mathbf{c} du modèle.

Une méthode classique pour construire les distributions $P(\mathbf{c})$ et $P(I|\mathbf{c})$ et d'utiliser une distribution de Gibbs (ou Boltzmann) qui permet de faire le lien avec la formulation énergétique du modèle déformable :

$$P(\mathbf{c}) = \frac{1}{Z_i} e^{-E_i(\mathbf{c})} \quad P(I|\mathbf{c}) = \frac{1}{Z_e} e^{-E_e(\mathbf{c})} \quad (\text{A.2})$$

où Z_i et Z_e sont des constantes de normalisation. La probabilité a posteriori $P(\mathbf{c}|I)$ vaut alors :

$$P(\mathbf{c}|I) = \frac{1}{Z} e^{-E_i(\mathbf{c}) - E_e(\mathbf{c})} = \frac{1}{Z} e^{-E(\mathbf{c})} \quad (\text{A.3})$$

On vérifie que le maximum de la probabilité à posteriori coïncide avec le minimum de l'énergie totale du modèle déformable.

Annexe B

Bibliographie personnelle

- [1] Vincent, F. and Clarysse, P. and Croisille, P. and Magnin, I. E. *Segmentation et suivi de mouvement d'objets déformables par région active*, GRETSI'99, Vannes, France p.163-166, 1999
- [2] Vincent, F. and Clarysse, P. and Croisille, P. and Magnin, I. E., *An elasticity-based model and its application to the estimation of the heart deformation in tagged MRI* IEEE International Conference On Image Processing (ICIP 2000), Vancouver, Canada, vol.1 p.629-632, 2000
- [3] F. Vincent, P. Clarysse, P. Croisille, and I. E. Magnin, *Segmentation of the heart from MR image sequences using a 3D active model*, Biomedical Engineering Society Annual Meeting, Seattle, Washington, USA, 2000.
- [4] Q.-C. Pham, F. Vincent, P. Clarysse, P. Croisille, and I. E. Magnin, *Heart segmentation in MRI using A 3D prior biventricular deformable model*, 11ème Forum des Jeunes Chercheurs en GBM, Compiègne, France, pp.70-71, 2001 (avec actes).
- [5] Q.-C. Pham, F. Vincent, P. Clarysse, P. Croisille, and I. E. Magnin, *A FEM-based deformable model for the 3D segmentation and tracking of the heart in cardiac MRI*, presented at 2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA 2001), Pula, Croatia, pp. 250-254, 2001 (avec actes).

Bibliographie

- [ACC⁺98] A. A. Amini, Y. Chen, R. W. Curwen, V. Mani, and J. Sun. Coupled B-snake grids and constrained thin-plate splines for analysis of 2-D tissue deformations from tagged MRI. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 17(3) :344–356, 1998.
- [AD89a] L. Axel and L. Dougherty. Heart wall motion : Improved method of spatial modulation of magnetization for mr imaging. *Radiology*, 172 :349–350, 1989.
- [AD89b] L. Axel and L. Dougherty. MR imaging of motion with spatial modulation of magnetization. *Radiology*, 171 :841–845, 1989.
- [AD92] A. A. Amini and J. S. Duncan. Bending and stretching models for LV wall motion analysis from curves and surfaces. *Image and Vision Computing*, 10(6) :418–430, 1992.
- [BCA96] E. Bardinet, L. D. Cohen, and N. Ayache. Tracking and motion analysis of the left ventricle with deformable superquadrics. *Medical Image Analysis*, 1(2) :129–149, 1996.
- [BCA98] E. Bardinet, L. D. Cohen, and N. Ayache. A parametric deformable model to fit unstructured 3D data. *Computer Vision and Image Understanding*, 71(1) :39–54, 1998.
- [BI98] A. Blake and M. Isard. *Active Contours*. Springer, London, 1998. 352 p.
- [BK89] R. Bajcsy and S. Kovacic. Multiresolution elastic matching. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46 :1–21, 1989.
- [Boo89] F. L. Bookstein. Principal warps : thin-plate splines and the decomposition of deformations. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 11(6) :567, 1989.
- [Bor86] G. Borgefors. Distance transformation in digital images. *CVGIP : Image Understanding*, 48 :344–371, 1986.
- [BRW98] A. E. Bowden, R. D. Rabbitt, and J. A. Weiss. Anatomical registration and segmentation by warping template finite element models. In *SPIE V 3254.*, pages 469–476, 1998.
- [BS00] M. Brejl and M. Sonka. Object localization and border detection criteria design in edge-based image segmentation : Automated learning from examples. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 19(10), 2000.

- [Can86] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 8(6) :679–698, 1986.
- [CAS92] I. Cohen, N. Ayache, and P. Sulger. Tracking points on deformable objects using curvature information. Technical Report 1595, INRIA, 1992.
- [CBK⁺00] P. Clarysse, C. Basset, L. Khouas, P. Croisille, D. Friboulet, C. Odet, and I. E. Magnin. 2D spatial and temporal displacement and deformation field fitting from cardiac MR tagging. *Medical Image Analysis*, 4(3) :253–268, 2000.
- [CC93] L. D. Cohen and I. Cohen. Finite-elements methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 15(11) :1131–1147, 1993.
- [CCA92] I. Cohen, L. Cohen, and N. Ayache. Using deformable surfaces to segment 3D images and infer differential structures. *CVGIP : Image Understanding*, 56(2) :242–263, 1992.
- [CET98] T. F. Cootes, G. J. Edwards, and C. J. Taylor. Active appearance models. In *European Conference on Computer Vision.*, volume 2, pages 484–498. Springer, 1998.
- [CFM97] P. Clarysse, D. Friboulet, and I. Magnin. Tracking geometrical descriptors on 3-D deformable surfaces : application to the left-ventricular surface of the heart. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 16(4) :392–404, 1997.
- [Cia86] P. G. Ciarlet. *Elasticité tridimensionnelle*. Paris, Masson edition, 1986. 168 p.
- [CP95] J. P. Cocquerez and S. Philipp. *Analyse d’images : filtrage et segmentation*. Masson, 1995. 433 p.
- [CRSG94] R. T. Constable, K. M. Rath, A. J. Sinusas, and J. C. Gore. Development and evaluation of tracking algorithms for cardiac wall motion analysis using phase velocity MR imaging. *Magn. Reson. Med.*, 32 :33–42, 1994.
- [CT95] T. F. Cootes and C. J. Taylor. Combining point distribution models with shape models based on finite element analysis. *Image and Vision Computing*, 13(5) :403–409, 1995.
- [CTCG95] T. F. Cootes, C. J. Taylor, D. H. Cooper, and J. Graham. Active shape models -their training and application. *CVGIP : Image Understanding*, 61(1) :38–59, 1995.
- [Cur93] A. Curnier. *Méthodes numériques en mécanique des solides*. Lausanne, presses polytechniques et universitaires romandes edition, 1993. 328 p.
- [DAB⁺99] L. Dougherty, J. C. Asmuth, A. S. Blom, L. Axel, and R. Kumar. Validation of an optical flow method for tag displacement estimation. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 18(4) :359–363, 1999.

- [DBIP94] A. Desgrez, J. Bittoun, and I. Idy-Peretti. *Bases Physiques de l'IRM : Cahiers d'Imagerie par Résonance Magnétique*. Masson, Paris, 1994.
- [DD96] V. Devlaminck and J. P. Dubus. Estimation of compressible or incompressible deformable motions for density images. In *ICIP'96.*, pages 125–128, Lausanne (Switzerland), 1996.
- [Dec97] J. Declerck. *Etude de la dynamique cardiaque par analyse d'images tridimensionnelles*. Phd thesis, Université de Nice Sofia-Antipolis, 1997.
- [DLSZ91] J. S. Duncan, F. A. Lee, A. W. M. Smeulders, and B. L. Zaret. A bending energy model for measurement of cardiac shape deformity. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 10(3) :307–320, 1991.
- [DS98] N. Duta and M. Sonka. Segmentation and interpretation of MR brain images : an improved active shape model. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 17(6) :1049–1062, 1998.
- [DSCS98] J. S. Duncan, P. Shi, R. T. Constable, and A. Sinusas. Physical and geometrical modeling for image-based recovery of left ventricular deformation. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 69(2-3) :333–351, 1998.
- [DZMR98] A. Dromigny, Y. M. Zhu, I. E. Magnin, and D. Revel. Fusion of cine-MR and contrast-enhanced first-pass data in patients with coronary artery disease : a feasibility study. *Invest. Radiol.*, 33 :12–21, 1998.
- [FMSH94] A. D. Fleming, W. N. McDicken, G. R. Sutherland, and P. R. Hoskins. Assessment of colour doppler tissue imaging using test-phantoms. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 20(9) :937–951, 1994.
- [FWG⁺99] M. Ferrant, S. K. Warfield, C. R. G. Guttman, R. V. Mulkern, F. A. Jolesz, and R. Kikinis. 3D image matching using a finite element based elastic deformation model. In C. Taylor and A. Colchester, editors, *Second International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention.*, Lecture Notes in Computer Science n°1679, pages 202–209, Cambridge, UK, 1999. Springer.
- [Gee99] J. C. Gee. On matching brain volumes. *Pattern Recognition*, 31(1) :99–111, 1999.
- [GFCM94] J. M. Gorce, D. Friboulet, P. Clarysse, and I. E. Magnin. Three-dimensional velocity field estimation of moving cardiac walls. In *Computers in Cardiology.*, volume 21, pages 489–493, Bethesda, Maryland, USA, 1994.
- [GFM94] J. M. Gorce, D. Friboulet, and I. E. Magnin. Méthode d'estimation du mouvement des parois cardiaques à partir d'images 3D. *Innovation et Technologie en Biologie et Médecine*, 15(5) :570–581, 1994.
- [GFM97] J. M. Gorce, D. Friboulet, and I. M. Magnin. Estimation of three-dimensional cardiac velocity fields : Assessment of a differential method and application to three-dimensional CT data. *Medical Image Analysis*, 1(3) :245–261, 1997.

- [GHLBB97] J. G. Gee, D. R. Haynor, L. Le Briquer, and R. K. Bajcsy. Advances in elastic matching theory and its implementation. In Trocaz, editor, *Lecture Notes In computer Sciences : CVRMed.*, pages 63–72, 1997.
- [GHRB94] J. C. Gee, D. R. Haynor, M. Reivich, and R. Bajcsy. Finite element approach to warping of brain images. In M. H. Loew, editor, *SPIE Medical Imaging 1994 : Image Processing.*, volume 2167, Bellingham, WA, USA, 1994.
- [GPAT97] S. Gupta, J. Prince, and S. Androutsellis-Theotokis. Bandpass optical flow for tagged MR imaging. In *ICIP 97.*, pages 663–666, 1997.
- [GPM94] M. A. Guttman, J. L. Prince, and E. R. McVeigh. Tag and contour detection in tagged MR images of the left ventricle. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 13(1) :74–88, 1994.
- [Han99] M. Han. *Analyse exploratoire de la déformation spatio-temporelle du myocarde à partir de l’Imagerie par Résonance Magnétique de marquage tissulaire.* Phd thesis, INSA de Lyon, 1999.
- [HMA00] I. Haber, D. N. Metaxas, and L. Axel. Three-dimensional motion reconstruction and analysis of the right ventricle using tagged MRI. *Medical Image Analysis*, 4(4) :335–355, 2000.
- [Hou90] Y. Houdas. *Physiologie Cardio-Vasculaire.* Vigot, Paris, 1990.
- [HRS⁺99] A. Hagemann, K. Rohr, H. S. Stiehl, U. Spetzger, and J. M. Gilsbach. Biomechanical modeling of the human head for physically based, nonrigid image registration. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 18(10) :875–884, 1999.
- [Imb79] J. F. Imbert. *Analyse des structures par éléments finis.* Ecole Nationale Supérieure de l’Aeronautique et de l’Espace, cepadues edition, 1979. 480 p.
- [Jan98] M. Janier. *Etude de la perfusion et du métabolisme myocardiques par la TEP et l’IRM. Fondements méthodologiques et application à l’ischémie.* Phd thesis, Université Claude Bernard, 1998.
- [JNB98] G. Jacob, J. A. Noble, and A. Blake. Robust contour tracking in echocardiographic sequences. In *ICCV’98.*, pages 324–331, Bombay, India, 1998.
- [JZL96] A. K. Jain, Y. Zhong, and S. Lakshmanan. Object matching using deformable templates. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 18(3) :267–278, 1996.
- [KCFO98] L. Khouas, P. Clarysse, D. Friboulet, and C. Odet. Fast 2D vector field visualization using a 2D texture synthesis based on an autoregressive filter. Application to cardiac imaging. *Machine Graphics And Vision*, 7(4) :751–764, 1998.
- [KDZB99] S. K. Kyriacou, C. Davatzikos, S. J. Zinreich, and R. N. Bryan. Nonlinear elastic registration of brain images with tumor pathology using a biomechanical model. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 18(7) :580–592, 1999.

- [KG94] C. Kambhamettu and B. Goldgof. Curvature-based approach to point correspondence recovery in conformal nonrigid motion. *CVGIP : Image Understanding*, 60(1) :26–43, 1994.
- [KSG99] A. Kelemen, G. Szekely, and G. Gerig. Elastic model-based segmentation of 3-D neuroradiological data sets. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 18(10) :828–839, 1999.
- [KWT87] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *Int. J. Comput. Vision*, 1(4) :321–331, 1987.
- [LL93] F. Leymarie and M. D. Levine. Tracking deformable objects in the plane using active contour models. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 15(6) :617–633, 1993.
- [LMR⁺98] J. Lötjönen, I. E. Magnin, P. J. Reissman, J. Nenonen, and T. Katila. Segmentation of magnetic resonance images using 3D deformable models. In M. W. Wells, A. Colchester, and S. Delp, editors, *MICCAI'98.*, pages 1213–1221, Cambridge, USA, 1998.
- [LRMK99] J. Lötjönen, P. J. Reissman, I. E. Magnin, and T. Katila. Model extraction from magnetic resonance volume data using the deformable pyramid. *Medical Image Analysis*, 3(4) :387–406, 1999.
- [MCSD96] F. G. Meyer, R. T. Constable, A. J. Sinusas, and J. S. Duncan. Tracking myocardial deformation using phase contrast MR velocity fields : a stochastic approach. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 15(4) :1–12, 1996.
- [MD97] J. C. McEachen and J. S. Duncan. Shape-based tracking of left ventricular wall motion. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 16(3) :270–283, 1997.
- [MD98] J. Montagnat and H. Delingette. Globally constrained deformable models for 3D object reconstruction. *Signal Processing*, 71(2) :173–186, 1998.
- [MIT96] T. Mc Inerney and D. Terzopoulos. Deformable models in medical image analysis : a survey. *Medical Image Analysis*, 1(2) :91–108, 1996.
- [Mon99] J. Montagnat. *Modèles déformables pour la segmentation et la modélisation d'images médicales 3D et 4D*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1999.
- [MPSK98] J. Martin, A. Pentland, S. Sclaroff, and R. Kikinis. Characterization of neuropathological shape deformations. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 20(2) :97–112, 1998.
- [MS99] S. Malassiotis and M. G. Strintzis. Tracking the left ventricle in echocardiographic images by learning heart dynamics. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 18(3) :282–290, 1999.

- [MSMG92] W. N. McDiken, G. R. Sutherland, C. M. Moran, and L. N. Gordon. Colour doppler imaging of the myocardium. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 18 :651–654, 1992.
- [MT95] T. McInerney and D. Terzopoulos. A dynamic finite element surface model for segmentation and tracking in multidimensional medical images with application to cardiac 4D image analysis. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 19(1) :69–83, 1995.
- [NA93] C. Nastar and N. Ayache. Fast segmentation, tracking, and analysis of deformable objects. In *ICCV'93.*, pages 163–168, Berlin, Germany, 1993.
- [O'D95] W. G. O'Dell. *Myocardial deformation analysis in the passive dog heart using high resolution MRI tagging*. Phd thesis, Johns Hopkins University, 1995.
- [OMH⁺95] W. G. O'Dell, C. C. Moore, W. C. Hunter, E. A. Zerhouni, and E. R. McVeigh. Three-dimensional myocardial deformations : calculation with displacement field fitting to tagged MR images. *Radiology*, 195(3) :829–835, 1995.
- [PH91] A. Pentland and B. Horowitz. Recovery of non rigid motion and structure. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 13(7) :730–742, 1991.
- [PHSE91] N. J. Pelc, R. J. Herfkens, A. Shimikawa, and D. R. Enzmann. Phase contrast cine MRI. *Magnetic Resonance Quaterly*, 7(4) :229–254, 1991.
- [Pla99] A. Planat. *Estimation de Mouvement par Maillage Actif Multiéchelle avec Prise en Compte des Discontinuités : Application à l'Imagerie Cardiaque en Résonance Magnétique*. Th. de doctorat, CREATIS, INSA de Lyon, 1999.
- [PM92] J. L. Prince and E. McVeigh. Motion estimation from tagged MR image sequences. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 11(2) :239–249, 1992.
- [PMR⁺98] A. C. Planat, I. E. Magnin, O. Ratib, D. Didier, and D. Revel. Estimation de mouvement par approche multi-échelle souple avec prise en compte de discontinuités. In *RFIA'98.*, volume 2, pages 1233–1239, France, 1998.
- [PMYA96] J. Park, D. Metaxas, A. A. Young, and L. Axel. Deformable models with parameter functions for cardiac motion analysis from tagged MRI data. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 15(3) :178–289, 1996.
- [PS91] A. Pentland and S. Sclaroff. Closed-form solutions for physically based modeling and recognition. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 13(7) :715–729, 1991.
- [PSDD01] X. Papademetris, A. J. Sinusas, D. P. Dione, and J. S. Duncan. Estimation of 3d left ventricular deformation from echocardiography. *Medical Image Analysis*, 5(1) :17–28, 2001.
- [PSR⁺98] W. Peckar, S. Schnörr, K. Rohr, H. S. Stiehl, and U. Spetzger. Linear and incremental estimation of elastic deformations in medical image registration

- using prescribed displacements. *Machine Graphics And Vision*, 7(4) :807–829, 1998.
- [PVC⁺01a] Q.-C. Pham, F. Vincent, P. Clarysse, P. Croisille, and I. E. Magnin. A FEM-based deformable model for the 3D segmentation and tracking of the heart in cardiac MRI. In *2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA 2001)*, volume 1, pages 250–254, Pula, Croatia, 2001.
- [PVC⁺01b] Q.-C. Pham, F. Vincent, P. Clarysse, P. Croisille, and I. E. Magnin. Heart segmentation in MRI using a 3D prior biventricular deformable model. In *11ème Forum des Jeunes Chercheurs en GBM*, volume 1, pages 70–71, Compiègne, France, 2001.
- [RAH97] P. Radeva, A. A. Amini, and J. Huang. Deformable B-solids and implicit snakes for 3D localization and tracking of spamm MRI data. *Computer Vision and Image Understanding*, 66(2) :163–178, 1997.
- [Ran95] S. Ranganath. Contour extraction from cardiac MRI studies using snakes. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 14(2) :328–338, 1995.
- [RB97] D. Rueckert and P. Burger. Shaped-based segmentation and tracking in 4D cardiac MR images. In *CVRMed'97.*, pages 43–52, Grenoble, France, 1997.
- [Rüe97] D. Rüeckert. *Segmentation and tracking in cardiovascular MR images using geometrically deformable models and templates*. Phd thesis, University of London, 1997.
- [Rei97] P.-J. Reissman. *Modélisation et mise en correspondance par pyramides actives : application à l'imagerie cardiaque par résonance magnétique*. Phd thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, 1997.
- [RLN⁺97] P.-J. Reissman, J. Lötjönen, J. Nenonen, I. E. Magnin, and T. Katila. High level vision with the deformable pyramid. In *Seizième Colloque GRETSI.*, pages 1483–1485, Grenoble, France, 1997.
- [RRH85] E. L. Ritman, R. A. Robb, and L. D. Harris. *Imaging Physiological Functions : Experience with the Dynamic Spatial Reconstructor*. Praeger, New York, 1985.
- [RSH⁺99] D. Rueckert, L. I. Sonoda, C. Hayes, D. L. G. Hill, M. O. Leach, and D. J. Hawkes. Nonrigid registration using free-form deformations : application to breast MR images. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 18(8) :712–721, 1999.
- [SCD⁺01] M. Sermesant, Y. Coudière, H. Delingette, N. Ayache, and J.A. Désidéri. An electro-mechanical model of the heart for cardiac image segmentation. In *MICCAI'2001*, Utrecht, The Netherlands, 2001.
- [SLBN94] S. M. Song, R. M. Leahy, D. B. Boyd, and S. Napel. Determining cardiac velocity fields and intraventricular pressure distribution from a sequence of ultrafast CT cardiac images. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 13(2) :387–397, 1994.

- [SP95a] S. Sclaroff and A. Pentland. Modal matching for correspondence and recognition. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 17(6) :545–561, 1995.
- [SP95b] M. Syn and R. Prager. A model-based approach to 3D freehand ultrasound imaging. In Yves Bizais, editor, *International Conference on Information Processing in Medical Imaging, IPMI 95.*, Ile de Berder, France, 1995. Kluwer.
- [SSC⁺00] P. Shi, A. J. Sinusas, R. T. Constable, E. Ritman, and J. S. Duncan. Point-tracked quantitative analysis of left ventricular motion from 3D image sequences. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 19(1) :37–50, 2000.
- [Tag99] H. D. Tagare. Shape-based nonrigid correspondence with application to heart motion analysis. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 18(7) :570–579, 1999.
- [TW35] R. Tennant and C. J. Wiggers. The effect of coronary occlusion on myocardial contraction. *American Journal Physiology*, 112 :351–361, 1935.
- [VCCM99] F. Vincent, P. Clarysse, P. Croisille, and I. E. Magnin. Segmentation et suivi de mouvement d’objets déformables par région active. In *GRETSI’99.*, pages 163–166, Vannes, France, 1999.
- [VCCM00a] F. Vincent, P. Clarysse, P. Croisille, and I. E. Magnin. An elasticity-based model and its application to the estimation of the heart deformation in tagged MRI. In *IEEE International Conference On Image Processing (ICIP 2000)*, volume 1, pages 629–632, Vancouver, Canada, 2000.
- [VCCM00b] F. Vincent, P. Clarysse, P. Croisille, and I. E. Magnin. Segmentation of the heart from MR image sequences using a 3D active model. In *Biomedical Engineering Society Annual Meeting*, Seattle, Washington, USA, 2000.
- [Wah90] G. Wahba. *Spline Models for Observational Data*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1990. 169 p.
- [Wed92] V. J. Wedeen. Magnetic resonance imaging of myocardial kinematics, technique to detect, localize and quantify the strain rates of the active human myocardium. *Magnetic Resonance in Medicine*, 27 :52–67, 1992.
- [WS00] Y. Wang and L. H. Staib. Boundary finding with prior shape and smoothness models. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelligence*, 22(7) :738–743, 2000.
- [XP98] C. Xu and J. L. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(3) :359–369, 1998.
- [YKA95] A. A. Young, D. L. Kraitichman, and L. Axel. Tracking and finite element modeling of stripe deformation in magnetic resonance tagging. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 14(3) :413–421, 1995.

- [You99] A. A. Young. Model tags : direct three-dimensional tracking of heart wall motion from tagged magnetic resonance images. *Medical Image Analysis*, 3(4) :361–372, 1999.
- [You00] L. Younes. Deformations, warping and object comparison. Technical Report Tutorial ECCV'2000, Cachan (Fr) : CMLA, ENS Cachan, 2000.
- [ZDP96] Y. D. Zhu, M. Drangova, and N. J. Pelc. Fourier tracking of myocardial motion using cine-PC data. *Magnetic Resonance in Medicine*, 35 :471–480, 1996.
- [ZDP97] Y. D. Zhu, M. Drangova, and N. J. Pelc. Estimation of deformation gradient and strain from cine-PC velocity data. *IEEE Trans. Med. Imag.*, 16(6) :840–851, 1997.
- [ZPRY88] E. Zerhouni, D. Parish, W. Roger, and A. Yang. Human heart tagging with MR imaging - a method for non invasive assessment of myocardial motion. *Radiology*, 169 :59–63, 1988.
- [ZT71] O. C. Zienkiewicz and R. C. Taylor. *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London (Great Britain), 1971.
- [ZT91] O. C. Zienkiewicz and R. C. Taylor. *La méthode des éléments finis*. AFNOR Technique, 1991. 521 p.