

Prise en compte de discontinuités et estimation de mouvement

Patrick Clarysse
Avril 2002
Révisé Février 2006

1

Creatis

Prise en compte de discontinuités et estimation de mouvement - Sommaire -

- 1- Approche classique
- 2- Notion de discontinuités de mouvement
- 3- Premières approches de PCD
- 4- Approches Statistiques
- 5- Approches variationnelles
- 6- Conclusion

2

Creatis

1 - Approche classique

- Equation de Contrainte du Mouvement :

$$DFD(x, y, t) \approx I_x dx + I_y dy + I_t dt = I_t + \nabla I \cdot \mathbf{v} = 0$$

- **Problème mal posé : 2 inconnues, 1 équation**
→ On estime la composante dans la direction de ∇I
→ Problème d'ouverture (aperture problem)
- **Solution standard : les points voisins ont une vitesse similaire et le flux varie continuellement**

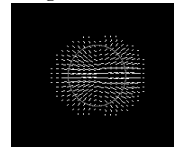
Minimiser : $\iint \left(\underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla I + I_t)^2}_{\text{eq. flot optique}} + \alpha^2 \left(\underbrace{\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2}_{\text{lissage (L)}} \right) \right) dx dy$ [Horn & Schunck 81]

(Attache aux données) 3

Creatis

- L'ECM devient « bien posée » :

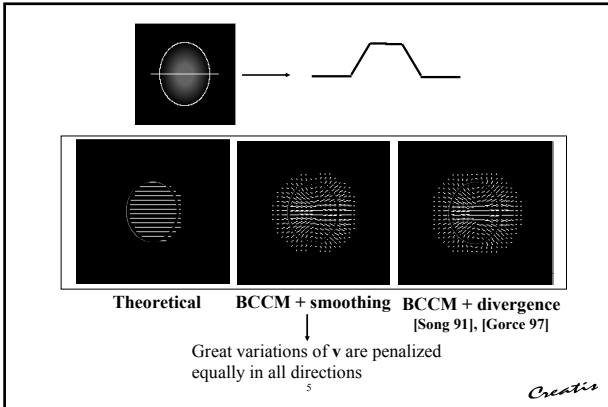
1. Le problème possède une solution
 2. La solution est unique
 3. La solution varie continûment en fonction des données
- On a fait une régularisation standard : restriction de l'espace des solutions admissibles (stabilisateur de Tikhonov)
- ⇒ lissage des frontières ou discontinuités de mouvement,



on pénalise les fortes variations de \mathbf{v} de manière isotrope

4

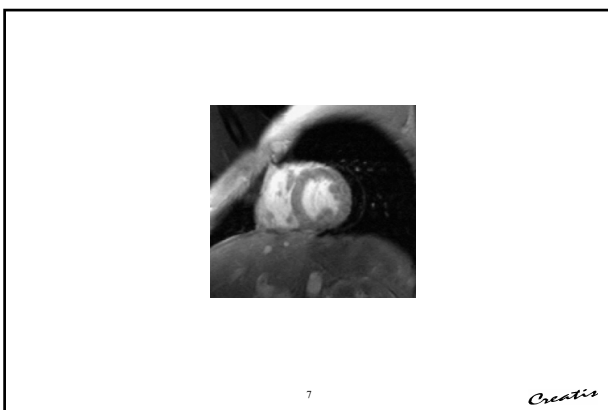
Creatis



2 - Notion de discontinuité de mouvement

- Discontinuité = frontière entre les projections d'objets animés de mouvements indépendants

6 *Creatis*



3- Premières approches de PCD

3.1 Exploitation des frontières photométriques

→ Hypothèse : les objets en mouvement ont un contenu photométrique homogène

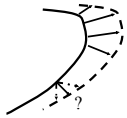
◆ **Approches globales :**

- segmentation en régions
 - statische (intensités)
 - du champ estimé courant (mouvement)
- application de la contrainte de lissage au sein de chaque région séparément
- Fusion de Régions de mvt homogène

8 *Creatis*

◆ **Approches locales :**

- Détection explicite des frontières photométriques
 - Extraction des contours et suivi du mouvement des contours :
 - Estimation et lissage du mouvement sur contours extraits à partir de ECM [Hildreth 84]
 - Mise en correspondance des contours à partir de la courbure [Duncan 91], [Cohen 92]
 - modélisation espace-temps [Bouthémy 87-89]



9

Creatis

• **Lissage Orienté [NAGEL 87]**

$$\iint \left[(\nabla I + I_x)^2 + \lambda \text{trace}(\nabla v^T \mathbf{W} \nabla v) \right] dx dy$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\|\nabla I\|^2 + 2\gamma} \begin{pmatrix} I_y^2 + \gamma & -I_x I_y \\ -I_x I_y & I_x^2 + \gamma \end{pmatrix}, \gamma = \text{cte}$$

$I_x, I_y \rightarrow 0, \mathbf{W} \rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{I}_2$, lissage isotrope Horn & Schunk

sinon dans le cas où $I_y = 0, I_x \neq 0$, on a :

$$\text{lissage} \approx \gamma (u_x^2 + v_x^2) + (I_x^2 + \gamma) (u_y^2 + v_y^2)$$

⇒ Dissymétrie de l'action selon les axes en fonction de l'amplitude de I_x

→ On privilégiera donc un lissage selon y majoritairement

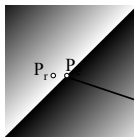
10

Creatis

• **Formulation similaire [Ghosal 96]**

$$L_G = \frac{1}{\|\nabla I\|^2} \left[I_y (u_x^2 + v_x^2) + I_x (u_y^2 + v_y^2) \right] \rightarrow \text{Lissage pondérant différemment les 2 composantes}$$

Cas d'un bord diagonal en mouvement :



Point de fort gradient : lissage = selon x et y ($I_x = I_y$) mais + faible qu'en P_r

11

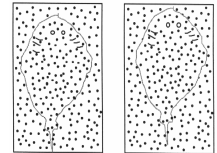
Creatis

• **Considérations numériques**

- L_G fournit des équations d'Euler Lagrange Elliptiques du 2nd ordre qui peuvent être discrétisées par différences finies
→ matrice de raideur symétrique, définie positive (pas de termes mixtes)

- L_N fournit des équations paraboliques ($\gamma=0$)
- Problèmes numériques de divergence

• **Hyp. « les frontières de mvmt. coïncident avec les contours photométriques » pas tj. vraie :**



12

3.2 Segmentation en Régions Homogènes au sens du mvt

Estimation du mvt :
 Identification d'un modèle
 ⇒ Paramètres à estimer

→ Voir cours identification de modèle de mvt.

Segmentation :
 Détermination de la zone d'applicabilité des jeux de paramètres

13

Creatis

– Approche hiérarchique sous l'hypothèse d'existence d'un mouvement dominant [Diehl 91]

1 - Identification d'un modèle global A pour toute l'image courante I_t

2- Compensation de l'image précédente I_{t-dt} : on applique à chaque point de l'image un déplacement issu de A

3- Calcul de l'erreur de compensation :
 $DFD(x,A) = I(x,t) - I(x+v_x dt, t-dt)$
 puis détection des régions mal compensées

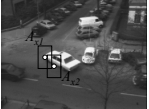
Réitérer 1-3 à l'intérieur des régions mal compensées

14

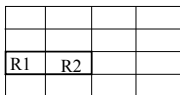
Creatis

– Segmentation en l'absence de mvt dominant [Sanson93]

1 - Identification d'un modèle local A_x en tout point à partir d'un voisinage B_x



2- Regroupement des points connexes ayant des paramètres similaires = fusion (quadtree)



Regroupement si
 Erreur de compensation
 $ER_{R1,R2}$ faible

15

Creatis

– Estimation-segmentation simultanées : approche Bayésienne [Bouthémy & François 93]

- Champ de VA. O = observations (images I_t, I_{t-1})
- Champ de VA. E = Étiquettes (N° région ou paramètres), ici un déplacement $d = (d_x, d_y)$

- Estimateur du Maximum A posteriori (MAP) qui maximise :

Probabilité globale a posteriori

$$p(E = e | O = o) = \frac{p(O = o | E = e) p(E = e)}{p(O = o)}$$

comme $p(O = o) = cte$

cela revient à maximiser $p(O = o | E = e) p(E = e)$

Probabilité a priori de E
 = terme régularisant

Probabilité d'observer o sachant e
 = terme d'attache aux données

16

Creatis

- Expression du terme d'attache aux données (Gaussienne)

$$p(O = o | E = e) = \prod_{\text{image}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon^2(\mathbf{x}, e)\right)$$

$$U(O = o | E = e) = \frac{1}{2\sigma} \sum_{\mathbf{x} \in S} (\varepsilon^2(\mathbf{x}, e))$$

Ce qui suppose l'indépendance des $p(o_i | e_j)$.

- $\varepsilon(\mathbf{x}, e)$ mesure l'écart entre les valeurs estimées et les données observées :

$$\varepsilon(\mathbf{x}, e) = \mathbf{V}^T(\mathbf{x}) \mathbf{v}_e + I_i$$

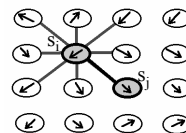
$$\text{ou } \varepsilon(\mathbf{x}, e) = I(\mathbf{x}, t) - I(\mathbf{x} + \mathbf{v}_e dt, t - dt) = \text{DFD}(\mathbf{x}, e)$$

17

Creatis

- Probabilité a Priori : E champ de Markov (terme régularisant)

- Soit S le support de E (grille 2D)
- Les éléments s de S sont appelés sites (pixels de la grille)
- Soit B_s le système de voisinage du site s (4 ou 8-voisinage)



- Le champ E est de Markov ssi :

$$1) p(e_i = o) \neq 0 \quad \forall i$$

$$2) p(e_i | e_p, s_j \in S - \{s_i\}) = p(e_i | e_p, s_j \in B_i)$$

- D'après le thm. d'Hammersley-Clifford :

$$p(E = e) = \frac{1}{Z} \exp[-U(e)], \quad Z \text{ constante de normalisation}$$

Distribution de Gibbs

18

Creatis

- Fonction d'énergie a priori $U(e)$

$$U(e) = \sum_{c \in C} V_c(e)$$

où c est appelé une clique = un site ou {sites voisins} et V_c est le potentiel associé à une clique.

- Exemple d'énergie a priori, cliques d'ordre 1:

$$V_c = \begin{cases} \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2 & \text{si } i = j \\ -\beta, & \text{si } i \neq j \\ \beta, & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{Configuration uniforme favorisée}$$

19

Creatis

- Maximiser $\ln(P(E=e|O=o))$ revient à minimiser :

$$-\ln(P(O=o|E=e)) + U(e) = U(P(O=o|E=e)) + U(e)$$

- On minimisera:

$$\alpha U(P(O=o|E=e)) + (1 - \alpha) U(e), \quad \alpha \text{ coefficient de pondération}$$

- PCD : pour une clique binaire :

$$V_{ij} = \mu(1 - \delta_{e_i, e_j}), \quad \mu > 0, \delta_{e_i, e_j} = 1 \text{ si } e_i = e_j, 0 \text{ sinon}$$

μ pénalise l'introduction d'une discontinuité

20

Creatis

- Estimation couplée du champ des vitesses

$$V_{ij} = \|\tilde{v}_i - \tilde{v}_j\|^2 \delta_{\epsilon_i, \epsilon_j}$$

- Continuité temporelle

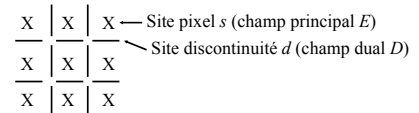
- Minimisation d'énergie (voir plus loin)
 - Algorithmes déterministes
 - Algorithmes stochastiques optimaux mais lents
 - Stratégies multi-résolutions

21

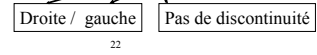
Creatis

4- Approches statistiques

- **Processus de ligne = VA cachée permettant d'inhiber localement le lissage (formalisme Markovien) [Geman 84]**



- **D peut être binaire, trinaire(-1,0,1) ou continue**



22

Creatis

Estimation MAP:

$$\begin{aligned} \{\hat{E}, \hat{D}\} &= \arg \max_{E, D} p(E, D|O) \\ &= \arg \max_{E, D} p(I_i|E, D, I_{i-1})p(E|D, I_{i-1})p(D|I_{i-1}) \\ &= \arg \min_{E, D} U(I_i|E, D, I_{i-1}) + \alpha_e U(E|D, I_{i-1}) + \alpha_d U(D|I_{i-1}) \end{aligned}$$

α_e, α_d , coefficients de régularisation

Energie d'attache aux données : comme précédemment

$$U(I_i|E, D, I_{i-1}) = \frac{1}{2\sigma} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} (\epsilon^2(\mathbf{x}, e))$$

A priori sur E:

$$U(E|D, I_{i-1}) = \sum_c V_\epsilon(e|d, I_{i-1})$$

23

Creatis

- **Potentiel associé à E**

$$V_{ij} = (1 - I_{ij})x_{ij}^2 + \psi(I_{ij}), \quad x_{ij} = \|\tilde{v}(s_i) - \tilde{v}(s_j)\|$$

- $I_{ij}=0$, $V_{ij} = x_{ij}^2$, lissage

- $I_{ij}=1$, activation du processus de ligne et pénalisation :

$$\psi(I_{ij}) = \beta I_{ij}, \beta > 0$$

- **Potentiel associé à D**

- Pénalisation ci-dessus

- favoriser coïncidence frontières photométriques-mvt

$$V_{dm} = \beta_d (1 - \eta_{ij}) I_{ij}, \eta_{ij} = 1 \text{ si contour entre } s_i \text{ et } s_j$$

24

Creatis

- Pénalisation des configurations désirées / interdites

$$\begin{array}{ccc} \frac{X}{X} \mid X & \frac{X}{X} \frac{X}{X} & \frac{X}{X} \mid X \\ \psi(l_{ij}) = 1.8 & \psi(l_{ij}) = 0.9 & \psi(l_{ij}) = 2.7 \end{array}$$

- ☺ Intéractions spatiales des discontinuités
- ☹ Plus grande complexité

25

Creatis

• **Modèle implicite de processus de ligne, outlier process**

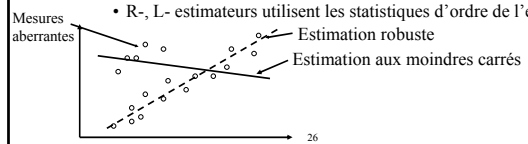
- **Statistique robuste : détecter les données qui ne sont pas conformes au modèle**

- M-Estimateur (mesure du maximum du vraisemblance)

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_s g(r_s) \quad \rightarrow \quad \|x_s - M(s, \theta)\|^2$$

g est une fonction définie positive, symétrique avec minimum unique en g(0)

- R-, L- estimateurs utilisent les statistiques d'ordre de l'erreur



26

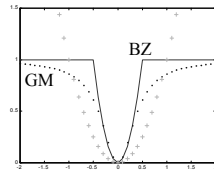
Creatis

- **Les fonctions g : réduire l'influence des grandes valeurs de r_i**

$$g_{BZ}(r_s) = \begin{cases} \alpha r_s^2 \sin |r_s| < \sqrt{\beta/\alpha} \\ \beta \sin \end{cases} \quad \text{Blake \& Zisserman (Processus de ligne)}$$

Geman & McClure (continu)

$$g_{GM}(r_s) = \frac{r_s^2}{p^2 + q^2 r_s^2} \text{ avec } (p, q) \in \mathbb{R}^2$$



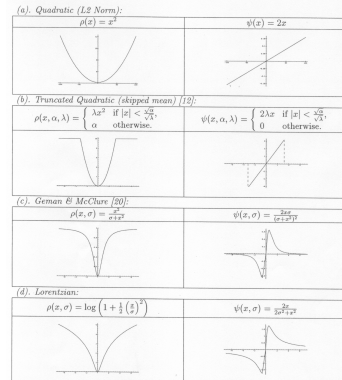
Dans la littérature, ces fonctions sont aussi appelées ϕ -fonctions

27

Creatis

From BLACK AND ANANDAN, CVIU, 1996

ϕ -fonctions et fonctions d'influence (dérivée) qui représentent le biais d'une mesure particulière sur la solution



Creatis

- Utilisation dans le cadre Markovien

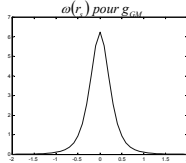
- Attache aux données

$$U_d(I_i|E, D, I_{t-1}) = \sum_{e \in \mathcal{C}} g[V_s(e)]$$

- A priori sur E : Régularisation spatiale

$$U_s(E|D, I_{t-1}) = \sum_{c \in \mathcal{C}} g[V_c(e)]$$

$$\omega(r_s) = \frac{g'(r_s)}{2r_s}, \text{ fonction de pondération}$$



☺ Formulation plus simple

☹ Pas d'interaction spatiale des discontinuités

29

Creatis

• Minimisation d'Énergies

- Optimisation des fonctionnelles

30

Creatis

• Approche de Black & Anandan [Black, CVIU, 1996]

$$\min_{\theta} E_D(a) \text{ où } E_D(\theta) = \sum_{\mathcal{R}} g(\nabla I \cdot \mathbf{v}(\theta) + I_t)$$

où l'on suppose un modèle $\mathbf{v}(x, y; \theta)$ du flux de paramètres θ

$$\text{ou } E(\mathbf{v}_s) = g_D(I_x u_s + I_y v_s + I_t) + \lambda \sum_{n \in \mathcal{V}_c} [g_S(u_s - u_n) + g_S(v_s - v_n)]$$

où g_D et g_S peuvent être des fonctions différentes

↙ Cohérence spatiale, dont le classique :

$$u_x^2 + u_y^2$$

31

Creatis

5- Approches Variationnelles

• Formulation variationnelle

Trouver $u(x,y), v(x,y)$ qui minimisent :

$$U_{HC}(u, v) = \iint [(I_x u + I_y v + I_t)^2 + \alpha(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)] dx dy$$

$$= \iint f(u, v, u_x, u_y, v_x, v_y, x, y) dx dy$$

- Equation d'Euler-Lagrange (général):

$$\begin{cases} f_u - \frac{d}{dx}(f_{u_x}) - \frac{d}{dy}(f_{u_y}) = 0 \\ f_v - \frac{d}{dx}(f_{v_x}) - \frac{d}{dy}(f_{v_y}) = 0 \end{cases}$$

32

Creatis

• **Formulation classique de Horn & Schunck (L2)**

$$\begin{cases} I_x(I_t + I_x u + I_y v) = \alpha(u_{xx} + u_{yy}) = \alpha \Delta u \\ I_y(I_t + I_x u + I_y v) = \alpha(v_{xx} + v_{yy}) = \alpha \Delta v \end{cases}$$

• **Formulation L1 [Cohen 93], [Kumar 95]**

$$U_{L1}(u, v) = \iint \left[(I_x u + I_y v + I_t)^2 + \alpha (\sqrt{u_x^2 + u_y^2} + \sqrt{v_x^2 + v_y^2}) \right] dx dy$$

$$\begin{cases} I_x(I_t + I_x u + I_y v) = \alpha \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \\ I_y(I_t + I_x u + I_y v) = \alpha \operatorname{div} \left(\frac{\nabla v}{\|\nabla v\|} \right) \end{cases}$$

33

Creatis

– En fait, $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) = K_u$, courbure de la courbe de

niveau u , soit encore la divergence du vecteur unitaire dans la direction du gradient de u .

34

Creatis

• **Cas général**

$$U_{L1}(u, v) = \iint \left[(I_x u + I_y v + I_t)^2 + \alpha (\phi(\|\nabla u\|) + \phi(\|\nabla v\|)) \right] dx dy$$

$$\begin{cases} I_x(I_t + I_x u + I_y v) = \alpha \operatorname{div} \left(\frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} \nabla u \right) \\ I_y(I_t + I_x u + I_y v) = \alpha \operatorname{div} \left(\frac{\phi'(\|\nabla v\|)}{\|\nabla v\|} \nabla v \right) \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} \nabla u \right) = \frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|} u_{\zeta\zeta} + \phi''(\|\nabla u\|) u_{\eta\eta}, \text{ où}$$

$u_{\eta\eta}$ est la dérivée directionnelle seconde de u dans la direction $\eta = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$

$u_{\zeta\zeta}$ est la dérivée directionnelle seconde de u dans la direction $\zeta \perp \eta$

35

Creatis

– **Interprétation**

• Cas L2 $\operatorname{div}(\) = 2u_{\zeta\zeta} + 2u_{\eta\eta}$ Lissage isotrope ds les 2 dir.

• Cas L1 $\operatorname{div}(\) = \frac{1}{\|\nabla u\|} u_{\zeta\zeta}$ Lissage unidirectionnel

– **Condition de stabilité : Influence de la forme de l'énergie et des conditions initiales (un minimum/plusieurs minima)**

→ la convexité de l'énergie est garantie par la convexité de $\phi(\|\nabla u\|)$ et les contraintes de positivité :

$$\phi'(\|\nabla u\|) \geq 0 \text{ et } \phi''(\|\nabla u\|) \geq 0$$

36

Creatis

- Choix de la fonction ϕ

- Lissage des régions homogènes

$$\lim_{\|\nabla w\| \rightarrow 0} \frac{\phi'(\|\nabla w\|)}{\|\nabla w\|} = \lim_{\|\nabla w\| \rightarrow 0} \phi''(\|\nabla w\|) = \phi''(0) > 0$$

- Limiter le lissage dans les zones de discontinuité

$$\lim_{\|\nabla w\| \rightarrow \infty} \frac{\phi'(\|\nabla w\|)}{\|\nabla w\|} = \lim_{\|\nabla w\| \rightarrow \infty} \phi''(\|\nabla w\|) = 0$$

37

Creatis

• Fonctions respectant ces conditions (issu de [Deriche 95]) :

Authors	$\Phi(s)$	$\Phi'(s)/s$	$\Phi''(s)$	Stability condition
Perona-Malik	$-\frac{k^2}{2}(e^{-s/k} - 1)$	$e^{-s/k}$	$\left(1 - 2\left(\frac{s}{k}\right)\right)e^{-\left(\frac{s}{k}\right)}$	$s^2 \leq \frac{k^2}{2}$
Perona-Malik	$\frac{k^2}{2} \log(1 + (s/k)^2)$	$\frac{1}{1 + \left(\frac{s}{k}\right)^2}$	$\frac{k^2(k^2 - s^2)}{(k^2 + s^2)^3}$	$s^2 \leq k^2$
Geman and reynolds	$\frac{(s/k)^2}{1 + (s/k)^2}$	$\frac{2k^2}{(k^2 + s^2)^2}$	$-\frac{2k^2(-k^2 + 3s^2)}{(k^2 + s^2)^3}$	$s^2 \leq \frac{k^2}{2}$
Alvarez		$g(s)$	$(1 - h(s))g'(s)$	
Tikhonov	$\frac{s^2}{2}$	1	1	
Green	$\log \cosh(s/k)$	$\frac{\tanh(s/k)}{k}$	$k^{-2}(\cosh(s/k))^{-2}$	
Rudin	s	$1/s$	0	
Aubert	$\sqrt{1 + (s/k)^2} - 1$	$\frac{1}{\sqrt{k^2 + s^2}}$	$-\frac{k}{(k^2 + s^2)^{3/2}}$	

38

Creatis

N o n c o n v e x

• Remarques

- Lorsque les coefs de u_{xx} et u_{yy} sont égaux le lissage est diffusé de manière isotrope, on tombe sur l'équation de la chaleur :

$$\{I_x(I_x + I_y)u + I_y v\} = \text{div}(\phi(\|\nabla u\|)\nabla u) = \phi \Delta u + \nabla \phi \cdot \nabla u$$

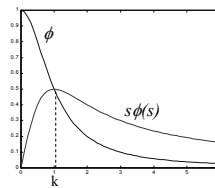
$$\phi = cte \Rightarrow \phi \Delta u$$

→ L'idée a donc été de faire varier ϕ : 1 à l'intérieur, 0 sur les frontières ou plus précisément [Perona-Malik 91] :

$$\phi(\|\nabla u\|) = e^{-\|\nabla u\|/k} \text{ ou } \phi(\|\nabla u\|) = \frac{1}{1 + (\|\nabla u\|/k)^2}$$

39

Creatis



- Inconvénients : existence et unicité de la solution impose $\nabla u \phi(\|\nabla u\|)$ non décroissante!
- Pour de fortes discontinuités, le processus est instable (eq. de la chaleur inverse)

40

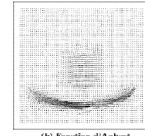
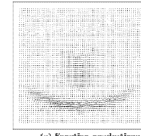
Creatis

- **Considérations numériques**
 - Différences finies
 - Elements finis
 - Approches par propagation de front (Osher & Sethian)

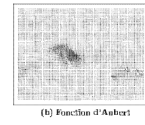
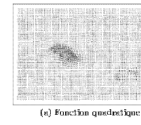
41

Creatis

- **Sequence Rubix Cube**



- **Sequence Taxi**



From [Deriche 95]

42

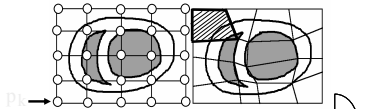
Creatis

Motion estimation using an active mesh able to cope with discontinuities

PhD Thesis, Anne Chrétien-Planat, CREATIS, Lyon, France.

■ **Active mesh**

- mesh m
- nodes p_k

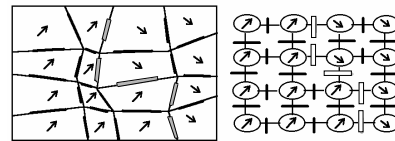


■ **Motion estimation using an active mesh**

- cell $s \in S$
- cell-support $p(x, y) \in B_s$
- motion vector $u_s \in \Lambda$

43

Creatis



Motion field (MRF)

$$U = (U_s, \dots, U_s, \dots, U_s)$$

with $\begin{cases} u \in \Omega \\ \Omega = \Lambda^{|S|} = \Lambda^N \end{cases}$

Outlier process (MRF)

$$Z(u) = (Z_{s,r}(u), \forall s \in S, \forall r \in V_s)$$

44

Creatis

