PRENOM : NOM :

Examen Théorie de l'Information

Documents et calculatrices autorisés, durée 45 minutes

I- Exercice Codage LZ

Donner les 12 premiers mots du dictionnaire obtenu pour le codage LZ de la séquence suivante et les codes transmis (s'arrêter quand le dictionnaire à une taille de 12) :

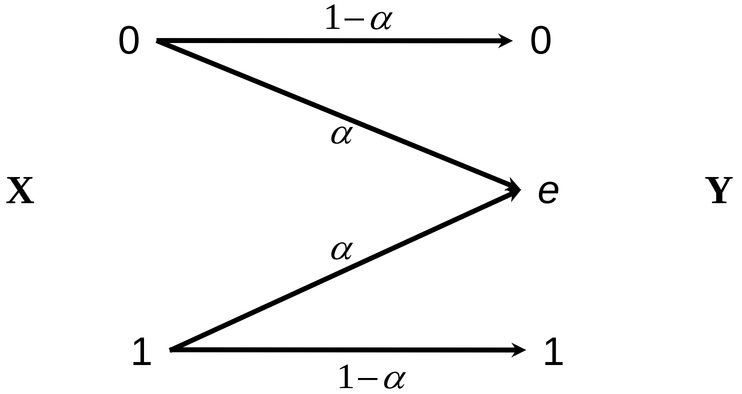
0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 . . .

II- Exercice Capacité d'un canal

Canal type « binary erasure channel », canal binaire avec perte.

On étudie la capacité d'un canal nommé *« binary erasure channel »* dont la modélisation est donnée en figure 1. Par rapport au un canal binaire symétrique, ce type de canal modélise un cana l de transmission où des bits peuvent être « perdus » au lieu d'être corrompus.

Ce canal est constitué en entrée de deux symboles et de trois symboles en sortie. Ainsi, le récepteur connait les bits qui ont été perdus.



Modèle de canal binaire avec perte de symbole.

Le but de cet exercice est :

- dans la première partie, de calculer la capacité de ce canal (pas trivial à cause du symbole '*e*', mais intuitivement simple ! : $C = 1 - \alpha$, isn't it ?),
- dans la deuxième partie, d'étudier l'effet d'un *feedback* sur la capacité du canal.

Première Partie : Capacité

a) Ecrire la matrice P[**Y/X**] du canal où **X**, respectivement **Y**, représente la variable aléatoire pour les données d'entrée et de sortie.

b) En calculant H(**Y/X**) montrer que cette entropie est identique à H(**Y/X**) d'un canal binaire symétrique 'normal' (sans perte de symbole).

c) La capacité du canal se calcule à partir de la formule suivante :

$$C = \max_{p(x)}\left(I(\mathbf{X};\mathbf{Y})\right)$$

Où I représente la transinformation et $p(x)$ représente la distribution de **X**.

➔ Exprimer la capacité C avec H(**Y**) et H(**Y/X**) puis donner la valeur maximum théorique de H(**Y**).

d) Le maximum théorique de H(**Y**) ne peut pas être atteint par un quelconque choix de $p(x)$. Pour obtenir la bonne expression de H(**Y**), il faut prendre en compte les probabilités de **X** et l'évènement {**Y**=e}.

➔ En notant p la probabilité d'apparition du symbole '1' en entrée (c.-à-d. p(**X**='1') = p), exprimer p(**Y**='0'), p(**Y**='1') et p(**Y**='e')

➔ Montrer que H(**Y**) peut se mettre sous la forme :

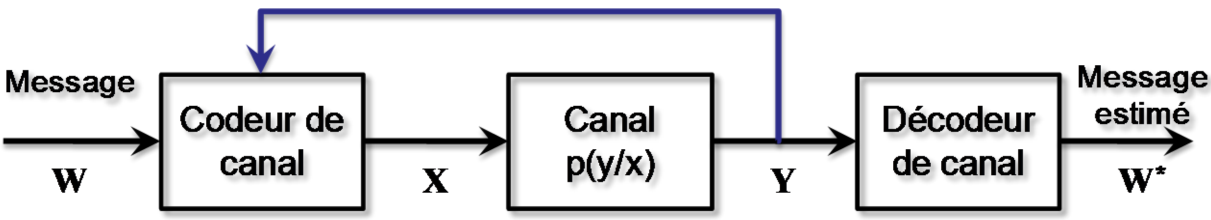
$$H(Y) = -(1-\alpha).(1-p).\log_2(1-p) - (1-\alpha).p.\log_2(p) - (1-\alpha).\log_2(1-\alpha) - \alpha.\log_2(\alpha)$$

Rappel… : log(a.b) = log(a) + log(b)

e) A partir des questions précédentes, en déduire que la capacité du canal est $C = 1-\alpha$, donner la valeur de p permettant d'obtenir C.

Seconde Partie : *Feedback*

Pour améliorer le taux de transmission, on propose l'ajout d'une boucle de retour (*feedback*) tel que présenté sur la figure suivante :



f) Par rapport au canal étudié, et sous l'hypothèse d'une transmission instantanée et sans mémoire, décrire la manière dont sera utilisé le *feedback*.

g) En s'appuyant sur la réponse précédente, justifier que la capacité C_{FB} du canal avec *feedback* est $C_{FB} = C$.

h) Quelque soit le canal (sans mémoire) on a $C_{FB} = C$. Conclure sur l'intérêt d'un *feedback* dans une transmission.

Fin.