

# Décomposition en ondelettes de maillages triangulaires 3D irrégulièrement subdivisés. Application à la compression.

Sébastien Valette<sup>1</sup>, Fabien Thibon<sup>1</sup>, Yun-Sang Kim<sup>1</sup>, Ho-Youl Jung<sup>2</sup>, Isabelle Magnin<sup>1</sup> et Rémy Prost<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CREATIS, UMR CNRS 5515, affilié à l'INSERM,

INSA 502, 69621, VILLEURBANNE, France

<sup>2</sup> School of Computer & Communications Eng., Yeungnam Univ.

Dae-dong, Kyongsan-city, Kyungpook, KOREA.

sebastien.valette@creatis.insa-lyon.fr, kim@creatis.insa-lyon.fr,  
hoyoul@ynucc.yeungnam.ac.kr, remy.prost@creatis.insa-lyon.fr.

**Résumé** – Nous proposons un nouvel algorithme de subdivision qui permet la simplification des maillages triangulaires quelconques à l'aide de la transformée en ondelettes. Cet algorithme est appliqué à la compression sans pertes des maillages. Des résultats expérimentaux montrent l'efficacité de cette approche dans des représentations multirésolutions.

**Abstract** – We propose a new subdivision process allowing the simplification of irregularly subdivided triangular meshes by the wavelet transform. This algorithm is applied here to lossless compression of meshes. Some experimental results prove the efficiency of this approach in multiresolution schemes.

## 1. Introduction

L'analyse multirésolution de surfaces 3D reçoit actuellement un intérêt grandissant du fait de l'accroissement de l'utilisation d'objets 3D dans de nombreux domaines : imagerie médicale, infographie.

L'analyse multirésolution possède des propriétés intéressantes: partant d'un objet haute résolution, plusieurs approximations peuvent être générées. Les détails perdus lors des différentes phases de simplification peuvent être restitués à l'utilisateur s'il demande une précision plus grande. Cette technique accélère l'affichage des surfaces et permet une compression efficace.

Un aperçu des méthodes utilisées pour simplifier les maillages, telles que la suppression de certains sommets [2], la contraction des arêtes [3], les ondelettes surfaciques [4], est présenté en [1].

Nous porterons notre attention sur la méthode de décomposition régulière en ondelettes de Lounsbery [4] car les ondelettes sont très efficaces pour l'analyse multirésolution. Dans la deuxième partie, nous expliquerons ce type de décomposition [4] et montrerons ses inconvénients dans les applications pratiques. Dans la troisième partie, nous proposerons une méthode de décomposition irrégulière qui permet l'analyse multirésolution de maillages quelconques. Dans la quatrième partie, nous montrerons que notre proposition permet une compression efficace des maillages. La section 5 sera consacrée aux résultats expérimentaux.

## 2. Décomposition en ondelettes surfaciques.

Dans le procédé de décomposition en ondelettes surfaciques, un maillage "germe" (par exemple un tétraèdre, figure 1.a) est subdivisé (figure 1.b) et déformé (figure 1.c) pour qu'il épouse la surface à approximer. Le processus de subdivision consiste simplement à partager chaque triangle du maillage en quatre nouveaux triangles. Ces opérations sont itérées jusqu'à la précision souhaitée.

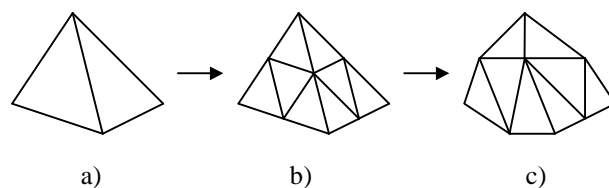


Figure 1 : Le processus de subdivision

L'analyse multirésolution est ensuite réalisée à l'aide de deux filtres  $A^j$  et  $B^j$  pour chaque niveau de résolution  $j$ . La reconstruction est assurée par les deux filtres de synthèse  $P^j$  et  $Q^j$ . Ces filtres sont représentés sous une forme matricielle. Si nous appelons  $C^j$  la matrice  $N(j) \times 3$  donnant les coordonnées de chaque sommet du maillage à la résolution  $j$ , les relations suivantes apparaissent:

$$C^j = A^{j+1} \cdot C^{j+1} \quad (1)$$

$$D^j = B^{j+1} \cdot C^{j+1} \quad (2)$$

$$C^{j+1} = P^j \cdot C^j + Q^j \cdot D^j \quad (3)$$

$D^j$  représente les coefficients d'ondelettes, nécessaires pour reconstruire  $C^{j+1}$  en partant de  $C^j$ . Le procédé de lifting [6] est utilisé pour construire une base d'ondelettes orthogonales aux fonctions d'échelle (fonctions "chapeau") dans un espace 3D fixé par la topologie du maillage. Sans le procédé de lifting, l'analyse multirésolution consisterait en un simple sous échantillonnage du maillage ; avec le lifting, le maillage à la résolution  $j$  est la meilleure approximation au sens des moindres carrés du maillage au niveau  $j+1$ . L'outil primordial, utilisé lors du lifting, est le produit scalaire entre deux fonctions.

Lounsbery a utilisé la définition suivante :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\tau \in \Delta(M)} \left( \frac{K_j}{\text{aire}(\tau)} \int_{s \in \tau} f(s) \cdot g(s) \cdot ds \right) \quad (4)$$

$\Delta(M)$  est l'ensemble des triangles  $\tau$  du maillage et  $K_j$  est une constante pour un niveau de résolution donné ( $K_j=4^{-j}$ ). Il faut remarquer que cette formulation induit l'hypothèse que les triangles du maillage possèdent tous la même aire. Une conséquence directe est qu'un maillage à la résolution  $j$  sera effectivement la meilleure approximation d'un maillage à la résolution  $j+1$  seulement si les aires des différents triangles sont égales. La figure 2.b illustre les effets du lifting appliqué sur une fonction ondelette non orthogonalisée (figure 2.a).

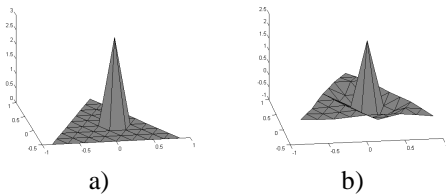


Figure 2 : fonctions ondelettes en 3D

Les ondelettes surfaciques constituent un outil puissant pour l'analyse multirésolution. Toutefois, dans le processus de simplification, l'inconvénient majeur est la fusion systématique des faces par groupes de 4. Si le maillage ne permet pas de telles fusions sur son intégralité, un rééchantillonnage du maillage devient obligatoire et conduit à un maillage ayant plus de faces que l'original [5]. Le but de ce travail est donc de résoudre ce problème en généralisant le processus de subdivision, comme le décrit le chapitre suivant.

### 3. Proposition de subdivision irrégulière

Dans la méthode proposée ici, le processus de subdivision est modifié: chaque face du maillage n'est pas systématiquement subdivisée en 4 faces, mais peut aussi être partagée en 3 ou 2 faces, ou rester inchangée. Un exemple de quatre subdivisions possibles est montré dans la figure 3.

Ce changement nous permet de simplifier les maillages même si certaines faces ne peuvent être fusionnées 4 par 4. L'étape de simplification fait entrer en jeu un algorithme qui fusionne les faces d'un maillage donné, en respectant certaines contraintes établies par le processus de subdivision. La figure

4 donne un exemple où l'algorithme réduit un ensemble de 15 faces en 6 faces, en formant un groupe de 4 faces ( $G_2$ ), deux de 3 faces ( $G_3, G_6$ ), deux groupes de 2 faces ( $G_1$  et  $G_4$ ) et en laissant une face intacte ( $G_5$ ).

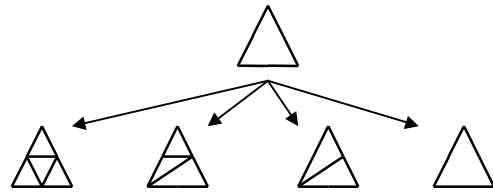


Figure 3 : Quelques cas de subdivision

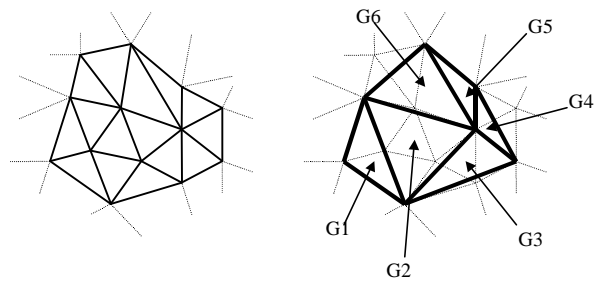


Figure 4 : un exemple de simplification

Afin de faciliter la simplification du maillage haute résolution et d'éviter une recherche exhaustive, une modification de celui-ci est permise, facilitant la simplification. Durant cette modification, certains segments voient leurs sommets changer, comme le montre la figure 5. Il faudra donc mémoriser cette étape pour retrouver exactement le maillage original lors de la reconstruction, garantissant ainsi la réversibilité du procédé.

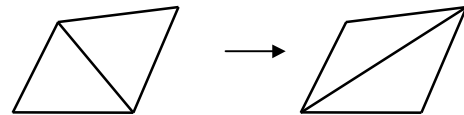


Figure 5 : une modification de maillage

Il reste ensuite à réaliser l'approximation du maillage haute résolution avec le maillage simplifié, à l'aide de la méthode de Lounsbery, nous fournissant ainsi les filtres  $A^j, B^j, P^j$  et  $Q^j$ . Nous proposons ici une reformulation du produit scalaire entre deux fonctions. Dans (4)  $K_j$  devient  $K_j(\tau)$  et varie selon la face considérée. Par exemple, pour une face se partageant en trois durant la subdivision :  $K_j(\tau)=3$  et pour les trois faces résultantes de cette subdivision :  $K_{j+1}(\tau)=1$ . Ce choix tient compte des différences d'aires entre les triangles (la face initiale sera approximativement trois fois plus grande que les faces résultantes)

### 4. Compression sans pertes

Une surface 3D est représentée par les coordonnées des sommets des faces, ainsi que par leur connectivité. Le nombre de bits nécessaires à la définition des sommets dépend de la dynamique des coordonnées. Par exemple, si un objet 3D est

borné par un cube d'arête de longueur  $L=1024$ , 10 bits par coordonnées sont nécessaires, soit 30 bits par sommet.

Dans le cas général, le nombre de bits nécessaire au codage de chaque sommet est :

$$B_s = 3 \log_2(L) \quad (5)$$

Le nombre de bits nécessaires au codage de la connectivité d'une face à la résolution  $j$  dépend directement du nombre de sommets  $N_s^j$  et vaut :

$$B_f^j = 3 \log_2(N_s^j) \quad (6)$$

Dans notre approche multirésolution, il est nécessaire de coder l'objet à la résolution la plus basse et les informations nécessaires pour reconstruire la surface à un niveau supérieur, pour tous les niveaux de résolution. Ces dernières informations sont des coefficients d'ondelettes et les caractéristiques des subdivisions de chaque face.

Le codage de la surface à la plus basse résolution est basé sur un algorithme de découpage de la surface détaillé en [8]. Ce découpage permet un codage efficace des faces (méthode arborescente) et des coordonnées des sommets (méthode prédictive). L'expérience a montré que le codage optimal était atteint en employant une prédiction linéaire à deux ancêtres.

Le codage des coefficients d'ondelettes est réalisé par codage entropique (codeur arithmétique). Ce choix résulte de l'observation de la concentration de l'histogramme des coefficients d'ondelettes autour de la valeur zéro.

Le codage des caractéristiques des subdivisions est réalisé en donnant la liste des nouveaux sommets qu'elles engendrent : si  $N_s^j$  est le nombre de sommets d'un maillage,  $N_f^j$  le nombre de faces et  $N_a^j$  le nombre d'arêtes, on peut établir l'approximation :

$$N_f^j = N_a^j = 2 \cdot N_s^j \quad (7)$$

Il faudra, pour chaque segment, déterminer si un sommet doit y être créé, ce qui représente un total de  $N_a^j = N_f^j$  bits. Il faudra aussi, pour les faces subdivisées en 2 ou 3 (Figure 5), des informations supplémentaires pour déterminer précisément leur type de subdivision. Ces informations nécessitent un maximum de deux bits par face, ce qui se traduit par un coût supplémentaire maximum de  $2 \cdot N_f^j$  bits.

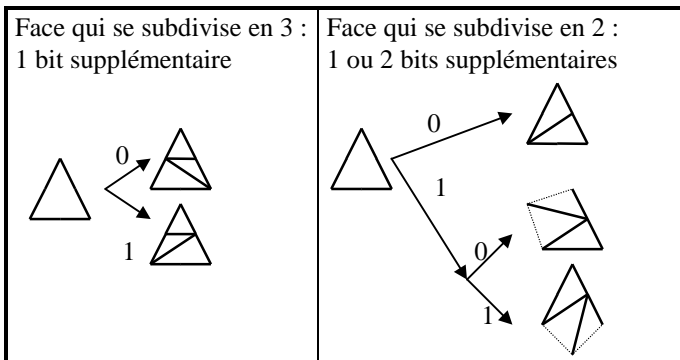


Figure 5: subdivisions nécessitant un surplus d'information

La quantité totale d'information à transmettre sera donc au maximum égale à  $3 \cdot N_f$  bits. Lors du passage d'un niveau de résolution au niveau supérieur, le nombre de faces et de sommets double en moyenne. Les subdivisions auront donc créé  $N_f$  nouvelles faces, à partir d'une quantité de  $3 \cdot N_f$  bits. Ces nouvelles faces auront donc été codées en moyennes sur 3 bits/face. Nous avons donc d'après (5), (6), et (7):

$$N^j = N^0 + \sum_{k=1}^j \Delta N^k \quad (8)$$

$$\Delta N^j = 3 H_{coeff}^j N_s^{j-1} + 3 \alpha^j N_f^{j-1} \quad (9)$$

$$\alpha \cong 1 \quad (10)$$

$$T^j = \frac{3 N_s^j \log_2(L) + 3 N_f^j \log_2(N_s^j)}{N^j} \quad (11)$$

$N^j$  est la quantité d'information (en bits) nécessaire au codage de la surface à la résolution  $j$ .

$\Delta N^j$  est la quantité d'information (en bits) nécessaire pour passer de la résolution  $j-1$  à la résolution  $j$ .

$H_{coeff}^j$  est l'entropie des coefficients d'ondelettes à la résolution  $j$ .

$T^j$  est le taux de compression pour une représentation au niveau de résolution  $j$ .

On notera que la compression réalisée est sans pertes, grâce à l'utilisation d'une arithmétique sur des nombres entiers, en accord avec [9]. Une compression avec pertes contrôlées est possible en ne stockant ou en ne transmettant que les coefficients d'ondelettes les plus grands.

## 5. Resultats

Le tableau 1 illustre les résultats obtenus avec notre méthode sur un maillage du cœur. Le maillage initial est une triangulation construite selon [7], dont les coordonnées sont codées sur 7 bits. Le nombre d'octets situé au dessous du nombre de faces est le volume de données nécessaire pour reconstruire le niveau concerné en partant du niveau qui le précède (pour le niveau 0, il s'agit du volume de données nécessaire pour le construire)

Le tableau 2 donne des résultats supplémentaires sur divers maillages : cerveau, torse et poumon.

Nous pouvons remarquer qu'aux niveaux de résolution intermédiaires, utiles dans les applications pratiques, la qualité de l'approximation reste bonne en termes de forme et de taille du volume 3D.

Tableau 1 : résultats sur un maillage du coeur








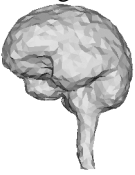

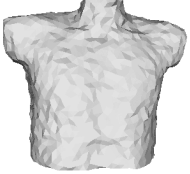



 Niveau 6 1008 faces 413 octets	 Niveau 5 446 faces 226 octets	 Niveau 4 208 faces 123 octets
 Niveau 3 94 faces 65 octets	 Niveau 2 46 faces 36 octets	 Niveau 1 22 faces 22 octets
 Niveau 0 8 faces 40 octets	Bilan global : fichier original : 4730 octets fichiers compressés : 925 octets Taux de compression : 5.1 : 1	

Tableau 2 : résultats complémentaires

 Original 3584 faces 8 niveaux	 Niveau 4 524 faces	Fichier original : 19493 octets Fichier compressé : 3246 octets Taux de compression : 6 : 1
 original 4454 faces 10 niveaux	 Niveau 5 306 faces	Fichier original : 25894 octets Fichier compressé : 4062 octets Taux de compression : 6.4 : 1
 Original 1916 faces 10 niveaux	 Niveau 5 168 faces	Fichier original : 9705 octets Fichier compressé : 1801 octets Taux de compression : 5.4 : 1

## 6. Conclusion :

Nous avons proposé une nouvelle méthode permettant de réaliser une analyse multirésolution sur des maillages triangulés quelconques. Contrairement à [4], où une refonte du maillage doit être effectuée pour le simplifier, notre procédé s'applique directement sur la surface originale. Cette méthode concerne de nombreuses applications potentielles, comme la compression de maillages, la transmission progressive et l'affichage accéléré.

Remerciements: les auteurs remercient les professeurs E. Rittman et R. Robb pour la fourniture des données angiographiques, et J. Lotjonen pour la construction des maillages originaux.

Ce travail de recherche s'inscrit dans les thématiques scientifiques du PRC-GDR ISIS.

## Références:

- [1] P. S. Heckbert, M. Garland, *Survey of polygonal surface simplification algorithms*, School of computer science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh. URL : <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/user/garland/www/multires/sur-vey.html>
- [2] M. Soucy, D. Laurendau, *Multiresolution surface modeling based on hierarchical triangulation*, Computer vision and image understanding, volume 63, No 1, January 1996, pages 1-14.
- [3] H. Hoppe, *Progressive meshes*. Computer Graphics (SIGGRAPH '96 Proceedings), pages 99-108. URL : <http://www.research.microsoft.com/~hoppe/>
- [4] M. Lounsbery. *Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type*. PhD thesis, Dept. of Computer Science and Engineering, U. of Washington, 1994. URL : <ftp.cs.washington.edu/pub/graphics/LounsPhd.ps.Z>
- [5] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery and Werner Stuetzle. *Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes*. Technical report #95-01-02, Janvier 1995. URL: <http://www.cs.washington.edu/research/projects/grail2/www/pub/abstracts.html>
- [6] Wim Sweldens, *The Lifting Scheme : A Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets*, Applied and Computational Harmonic Analysis, Vol. 3, No. 2, April 1996, pp.186-200.
- [7] J. Lotjonen, P.J. Reissman, I.E. Magnin, J. Nenonen and T. Katila, *A triangulation method of an arbitrary point set for biomagnetic problem*, IEEE Trans. on Magnetics, Vol 34, No 4, July 1998
- [8] G. Taubin, J. Rossignac, *Geometric Compression Through Topological Surgery*, IBM Research Report. URL : <http://www.research.ibm.com/vrml/binary/>
- [9] H.Y. Jung, R. Prost, Lossless Subband Coding System Based on Rounding Transform, IEEE Trans. On Signal Processing, vol. 46, No 9, pp. 2535-2540, Sept. 1998.