



Creatis

Master Images et Systèmes

**Estimation du déplacement par ajustement de
la phase des signaux ou des images : application
à l'élastographie**

Adrian Basarab

Septembre 2005

Encadrant : Philippe Delachartre

Remerciements

Je tiens à remercier :

Philippe DELACHARTRE, responsable de mon projet au sein du Laboratoire CREATIS, pour sa disponibilité et son aide tout au long de l'année.

Hervé LIEBGOTT, pour ses conseils et sa disponibilité.

Mes CoPFEux, Edouard Royer et Pascal de Boissieu, pour leur travail et leur amitié.

Sommaire

Remerciements	2
Sommaire	3
I. Introduction	4
II. Contexte du projet	5
1. Echographie.....	5
2. Elastographie.....	7
3. Méthodes d'estimation du champ des déplacements	8
III. Développement théorique de l'estimateur 2D par ajustement de la phase	10
IV. Validation de l'estimateur par ajustement de phase	13
1. Estimateur 1D par ajustement de la phase	13
a) Partie théorique	13
b) Résultats sur des signaux de synthèse	13
c) Estimateur 1D itératif par ajustement de la phase – partie théorique.....	19
d) Analyse statistique de l'estimateur 1D itératif.....	20
2. Estimateur 2D par ajustement de la phase	21
a) Résultats sur des images de synthèse	21
b) Estimateur 2D itératif par ajustement de phase.....	25
c) Estimateur 2D itératif par ajustement de la phase – partie théorique.....	26
d) Analyse statistique de l'estimateur 2D itératif.....	27
V. Application de l'estimateur par ajustement de la phase	30
VI. Améliorations envisageables	35
VII. Conclusion	35
Bibliographie	36

I. Introduction

Au début des années 70, les ultrasons étaient utilisés dans le domaine médical notamment pour capter les bruits du cœur fœtal, puis quelques années plus tard l'échographie s'imposait comme un élément indispensable à la surveillance de toute grossesse. Depuis elle est aussi utilisée pour l'examen d'autres organes et depuis le début des années 90 de nombreuses expérimentations sont menées dans le domaine de l'élastographie ultrasonore sur laquelle travaille depuis quelques années au laboratoire CREATIS de l'INSA de Lyon une équipe de chercheurs. De nombreuses avancées y ont été réalisées et des collaborations avec des laboratoires étrangers sont en cours.

Lors d'une échographie conventionnelle il n'est pas possible, à l'image, de distinguer deux milieux ayant les mêmes propriétés acoustiques. Ce qui est, par exemple, le cas des tumeurs isoéchogènes de la thyroïde [Lysh-05]. En revanche il est possible de les distinguer à travers leurs propriétés mécaniques, propriétés auxquelles l'élastographie se propose de remonter à travers deux images échographiques du même milieu, acquises avant et après l'application d'une compression externe.

L'élastographie est basée sur la comparaison de deux images échographiques d'un même milieu entre états de contrainte statique. Les champs de déplacement entre les deux images sont estimés. Cette estimation donne par la suite la possibilité de remonter à des cartes paramétriques, comme les cartes de déformation ou des cartes de différentes propriétés élastiques.

Dans le cadre de la recherche en élastographie, ce Master a pour objectif de développer une méthode d'estimation du déplacement entre deux images échographiques. Dans un premier temps, l'enjeu de l'élastographie et le cadre du projet sont présentés. Ensuite, les méthodes les plus souvent utilisées pour la détection du mouvement, dans des applications de l'élastographie, sont évoquées. Puis, dans la deuxième partie, les aspects théoriques concernant l'estimateur du déplacement développé dans le cadre de ce master sont présentés. La troisième partie montre les résultats que nous obtenons avec le nouvel estimateur, par comparaison avec un estimateur classique. La quatrième partie montre les résultats avec l'estimateur proposé intégré à un algorithme de recherche par mise en correspondance de blocs. La dernière partie concerne les améliorations envisageables ainsi que les avantages que le nouvel estimateur peut apporter.

II. Contexte du projet

1. Echographie

L'échographie est une modalité d'imagerie utilisant les ultrasons, employée en médecine. Cette technique repose sur la propagation d'ondes acoustiques ultrasonores dans les tissus biologiques. On utilise pour cela une sonde échographique (barrette multiéléments ou mono élément), qui sert à la fois d'émetteur et de récepteur. Une partie des ondes incidentes est réfléchiée par les tissus. En fait, l'information principale qui est observée provient de la réflexion des ondes ultrasonores au niveau des interfaces entre les différents tissus et également de la diffusion due au caractère inhomogène des tissus. C'est donc le caractère échogène du milieu qui est codé en niveaux de gris sur l'image. L'image obtenue, représentant la coupe du milieu sondé, est une échographie (ou B-scan).

Les sondes échographiques sont constituées d'un ou plusieurs transducteurs fabriqués à partir d'un matériau piézoélectrique. Ces matériaux présentent la particularité de se déformer lorsqu'ils sont soumis à une différence de potentiel. De même lorsque ces cristaux sont déformés, une tension apparaît entre leurs faces. Les matériaux les plus couramment utilisés sont des corps ferroélectriques rendus piézoélectriques de manière artificielle (certaines céramiques, ou des plastiques...). Ainsi, on peut utiliser les transducteurs aussi bien pour l'émission que pour la réception d'une onde ultrasonore.

Dans l'échographie médicale classique, le transducteur est excité de manière périodique par une impulsion électrique. Une onde acoustique est alors générée. Elle va se propager dans le tissu examiné, et interagir avec lui. Il va alors se former des ondes de réflexion et de diffusion.

Pendant la phase de réception, l'ensemble des ondes réfléchies et rétro-diffusées dans la direction de la sonde est alors traduit en signal électrique par ses éléments piézoélectriques. Suite à cette phase de réception, on se trouve en présence d'une première forme du signal radio fréquence.

Vient alors un ensemble de traitements permettant de faire la mise en forme des voies. Pour obtenir des images ayant une bonne résolution latérale, on utilise des stratégies de tir échographique qui peuvent être assez variées. En particulier on utilise souvent plusieurs cristaux en même temps pour l'émission ou pour la réception. Pendant la phase de réception, les signaux RF issus de chaque cristal sont alors sommés avec des poids et des lois de retards permettant de focaliser le tir dans une région précise du tissu sondé. L'ensemble retards, pondérations et sommation constitue ce que l'on appelle la mise en forme des voies. On obtient alors un ensemble de lignes RF. Ces lignes sont juxtaposées. Avant d'afficher l'image quelques opérations sont encore nécessaires.

La propagation de l'onde dans le milieu entraîne une diminution de son amplitude proportionnelle au carré de la distance parcourue. La compensation de cette atténuation est appelée le TGC (Time Gain Compensation). On fait également ressortir les échos de faible amplitude par l'application d'un gain logarithmique. Enfin, on effectue une détection d'enveloppe. L'image ainsi créée par codage en niveaux de gris de l'amplitude des échos renseigne sur l'anatomie du milieu sondé [Cach-01].

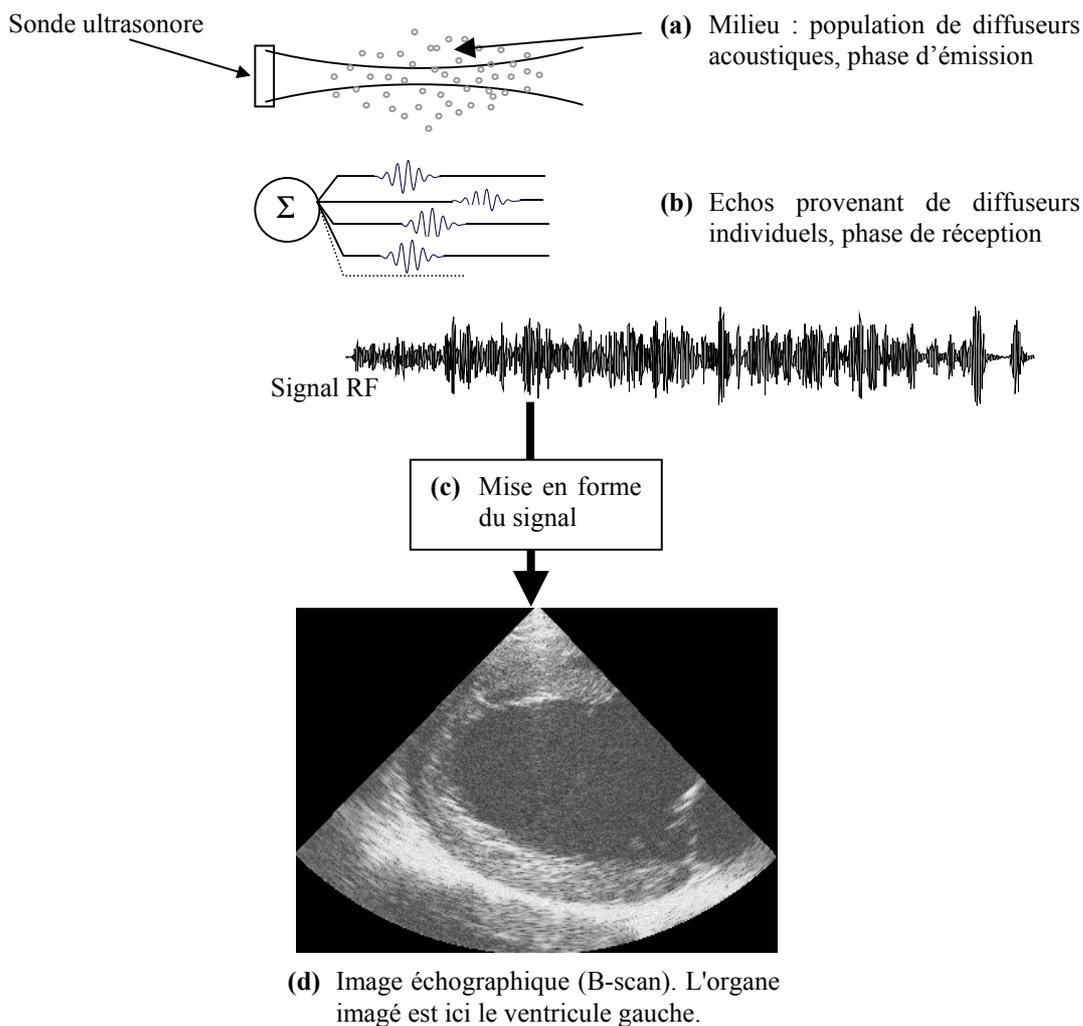


Figure II-1 : Formation de l'image échographique

La Figure II-1 nous montre les grandes étapes du processus de la formation des images échographiques. Les signaux RF montrés sur la même figure représentent les colonnes des images échographiques (un signal RF par colonne). Comme il s'agit de signaux modulés, nous constatons que dans la direction dite axiale (direction verticale des images) nous disposons naturellement d'oscillations et donc de détails dans les images. Les signaux oscillent en axial à la fréquence de la porteuse, qui est une caractéristique propre à l'échographe (habituellement autour de 7 MHz).

En revanche, dans la direction latérale, les signaux ne présentent pas d'oscillations. La résolution latérale est aussi moins bonne. C'est pour ce-là que souvent des post traitements sur les images échographiques sont nécessaires avant de lancer des algorithmes de calculs sur les images. Dans le cas de l'élastographie nous sommes amenés parfois à introduire artificiellement une porteuse dans la direction latérale [Chen-04], afin d'améliorer la résolution latérale des images.

2. Elastographie

La caractérisation tissulaire présente un intérêt fondamental en diagnostic clinique. Son objectif est de discriminer, au sein d'un tissu biologique, les zones saines des zones pathologiques. On observe que les processus pathologiques entraînent souvent un changement dans l'élasticité des tissus. Par exemple, les tumeurs présentent une dureté plus importante que les tissus sains.

L'approche échographique est limitée car elle ne donne pas d'information directe sur l'élasticité des tissus. Ainsi, depuis 1991, une nouvelle technique ultrasonore est apparue dont le but est d'étudier les propriétés élastiques des tissus biologiques en effectuant une cartographie de la déformation de ces tissus.

Comme on peut le voir sur la Figure II-2, une inclusion est visible sur l'image obtenue par élastographie alors que cette dernière ne l'est pas sur une image échographique classique. L'information complémentaire apportée par l'élastographie peut donc permettre un meilleur diagnostic.

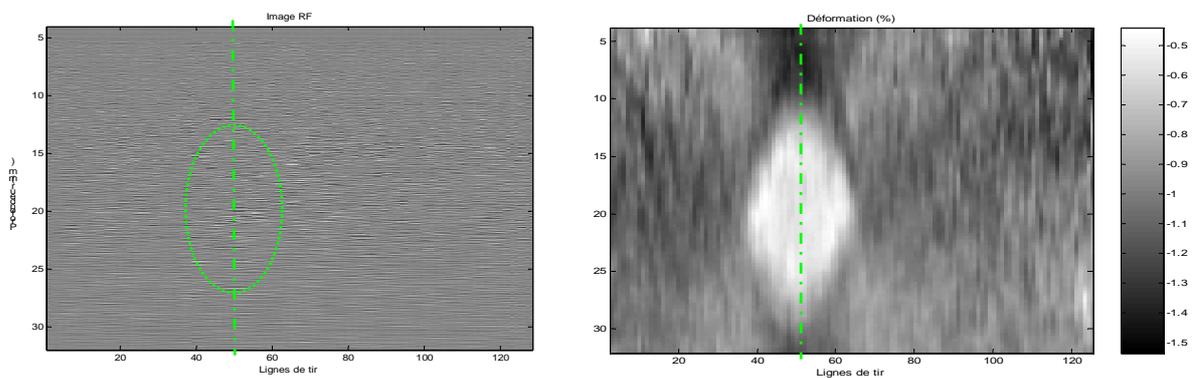


Figure II-2 : Intérêt médical de l'élastographie : à gauche une image échographique d'un fantôme avec une inclusion cylindrique, à droite image du même fantôme obtenue par élastographie (estimateur 1D [From-03]) où on peut voir l'inclusion dure

L'estimation des caractéristiques élastiques des tissus repose sur la capacité des tissus à se déplacer sous l'action d'une force. En 1991, Ophir et al. [Ophi-91] décrivent une méthode qu'ils nomment l'élastographie où la pression appliquée est statique. En utilisant la corrélation de signaux ultrasonores pour estimer le déplacement, ils en déduisent la déformation en dérivant le déplacement. Ces estimations peuvent être réalisées dans une direction déterminée (estimateurs 1D).

D'autre part, de nombreuses recherches d'estimation de mouvement en 2D sur des images échographiques ont été réalisées au cours de ces dernières années. Les méthodes utilisées cherchent à estimer les déplacements par des techniques de mise en correspondance, c'est-à-dire à trouver le déplacement subtil par un groupe de pixels (bloc) au cours du temps [Yeun-98] [Bohs-00].

3. Méthodes d'estimation du champ des déplacements

Comme nous l'avons évoqué dans la partie introductive, le but de l'élastographie est d'obtenir des cartes des propriétés mécaniques des tissus, à partir de deux images échographiques d'un même milieu, prises sous deux niveaux de compression différents. La première étape dans cette démarche est l'estimation du champ des déplacements entre les deux images. Il s'agit donc d'une estimation du mouvement qui s'est produit entre les deux images.

La compression du milieu se fait souvent en appuyant directement avec la sonde échographique sur le milieu en question. L'estimation du déplacement peut être faite soit en 1D (dans la direction d'appui, dite aussi axiale), soit en 2D (dans ce cas 2 champs des déplacements sont estimés, un dans la direction axiale et un deuxième dans la direction dite latérale, perpendiculaire à celle axiale).

Quand il s'agit d'une estimation 1D (dans la direction de tir des signaux RF), les méthodes qu'on retrouve dans la littérature sont basées sur la corrélation entre les signaux RF (II-1). $R_{rs}(\tau)$ représente la fonction de corrélation des signaux notés ici r et s , τ étant le décalage entre les deux signaux.

$$R_{rs}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)r(t + \tau)dt \quad (\text{II-1})$$

Deux possibilités sont ensuite utilisées pour estimer le déplacement. La première, qui reste la plus classique, utilise le maximum de corrélation. Ses résultats restent cependant fortement dépendants de la résolution axiale des images échographiques et de la forme du pic de corrélation. Plus celui-là est aigu, plus on peut espérer avoir une meilleure estimation. Sa forme dépend cependant de la bande passante de l'échographe, donc d'un facteur qu'en général nous ne pouvons pas maîtriser.

La deuxième possibilité est d'utiliser la fonction de corrélation complexe entre les signaux, obtenue, par le biais de la transformée de Hilbert, à partir de la corrélation. Il s'avère que la phase de cette fonction complexe présente un passage par zéro qui correspond au maximum de la corrélation [From-03]. Donc chercher le maximum de la corrélation devient dans ce cas une recherche de passage par zéro [Pesa-99]. Cette méthode semble donner des meilleurs résultats, surtout quand elle est accompagnée d'un algorithme de recherche du passage par zéro bien adapté, tel qu'un algorithme itératif basé sur la méthode de Newton [From-03].

Actuellement, de plus en plus de chercheurs s'intéressent à estimer le déplacement 2D entre deux images consécutives, dans le but de l'élastographie.

La quasi majorité des méthodes existantes actuellement en élastographie sont basées sur le speckle tracking. Le speckle est défini comme l'aspect granuleux qui compose l'image échographique. Il est la conséquence des interférences additives et soustractives créées par les ondes rétro diffusées par le milieu sondé. Le speckle est directement lié à la position des diffuseurs dans le milieu. Le déplacement de ces derniers entraîne un changement de position du speckle dans l'image. Ainsi, en estimant le mouvement du speckle on estime également le mouvement du milieu.

La possibilité d'utiliser le speckle pour le suivi d'objets en mouvement et pour la mesure de déplacement 2D a pour la première fois été émise par Robinson et al. [Robi-82], puis par

Akiyama et al [Akiy-86]. Ces premiers travaux avaient pour objectif la cartographie des vitesses du sang (Color Velocity Imaging CVI).

La méthode dite de speckle tracking représente en fait une méthode de mise en correspondance par blocs ('block matching'). La méthode consiste à poursuivre la position d'un bloc (groupement de pixels) de l'image de départ dans l'image d'arrivée par un critère de ressemblance (ou de dissemblance). La recherche se fait sur une zone délimitée de l'image d'arrivée, appelée zone de recherche. En 2000, Giachetti regroupe et compare les différents critères de ressemblance existants [Giac-00]. Parmi les plus utilisés on retrouve la corrélation (II-2), d'où la multitude de méthodes qui travaillent avec la fonction de corrélation (1D ou 2D).

$$R_{rs}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x, y)r(x + \tau_1, y + \tau_2) dx dy \quad (\text{II-2})$$

La relation ci-dessus représente la définition de la fonction de corrélation des images r et s, où τ_1 et τ_2 sont les décalages entre les deux images sur les directions x et y. Bien évidemment, sa mise en œuvre dans le cadre du speckle tracking nécessite le passage dans le temps discret.

Comme en 1D, la plupart des méthodes existantes en 2D travaillent par détection du pic de la corrélation. Il existe aussi des méthodes qui cherchent un double passage par zéros de la phase de la corrélation complexe [Chen-04]. La qualité des résultats obtenus par ce type de méthodes est dépendant de la pente de la phase. Plus la pente est grande, plus l'estimation sera meilleure. Le problème se pose surtout dans la direction latérale, où l'absence d'une porteuse fait que le passage par zéro de la phase est difficilement envisageable. Des traitements sur les images échographiques, avant de lancer les algorithmes de recherche, sont souvent nécessaires afin d'augmenter la résolution latérale des images [Chen-04]. Il existe aussi des méthodes qui combinent les deux approches, par détection du maximum de corrélation et par recherche du passage par zéro de la phase [Xili-03].

Le speckle tracking (en 1D comme en 2D) nous donne l'estimation des composantes de la translation qu'un bloc de l'image a subi au cours de la compression des tissus. Comme les mouvements qui interviennent en comprimant le milieu sont évidemment plus complexes qu'une simple translation, les méthodes de speckle tracking peuvent être accompagnées par des modèles de mouvement plus compliqués [Laco-04].

Toutes les méthodes évoquées auparavant ont pour but d'estimer le déplacement entre deux images échographiques. Il faut garder à l'esprit qu'il s'agit de petits déplacements, souvent de l'ordre de 1% de la taille de l'image. Donc une précision sub-pixélique est primordiale. Souvent, cette précision est assurée par des méthodes d'interpolation appliquées aux images. D'où les limites des méthodes actuelles. Plus on veut de la précision, plus nous sommes amenés à interpoler et donc plus on introduit des erreurs dans nos estimations.

III. Développement théorique de l'estimateur 2D par ajustement de la phase

L'estimateur proposé dans le cadre de ce Master travaille avec la phase de la fonction de corrélation complexe [Kay-90]. Par différence avec les estimateurs déjà existants, nous n'allons plus chercher le passage par zéro de celle-ci, mais nous allons minimiser l'erreur entre les mesures et la forme théorique de la phase (obtenue en sachant la forme des signaux composant les images échographiques) [Plan-03]. Cette minimisation nous donnera les estimations des translations (sur les deux directions) d'un bloc appartenant à une image échographique par rapport à sont correspondant dans une image prise sous un niveau de compression différent. Il faut noter que les estimateurs proposés par Kay et al. [Kay-90] et Plantier et al. [Plan-03] concernent l'estimation des fréquences instantanées d'un sinus en deux dimensions. Dans notre cas, les estimateurs développés mesurent le déplacement afin d'être adaptés à l'élastographie.

Cette façon d'estimer a d'une part l'avantage de ne pas être amenée à utiliser un algorithme d'estimation de passage par zéro et d'autre part elle s'avère moins dépendante de la résolution des images qu'une estimation par maximum de corrélation.

Prenons deux sections des images avant et après déformation que nous allons noter $r(x, y)$ et $s(x, y)$. La relation entre les deux sections est donnée par l'équation (III-1).

$$s(x, y) = r(x - \Delta_x, y - \Delta_y) \quad (\text{III-1})$$

Le couple (Δ_x, Δ_y) représente les translations latérale et axiale. Le but est de trouver un estimateur analytique non itératif de ce couple.

Considérons $R_{rs}(x, y)$ la fonction de corrélation 2D des images $r(x, y)$ et $s(x, y)$. Alors la fonction d'inter-corrélation complexe aura la forme :

$$\tilde{R}_{rs}(x, y) = R_{rs}(x, y) + jH\{R_{rs}(x, y)\} \quad (\text{III-2})$$

où $H\{R_{rs}(x, y)\}$ désigne la transformée de Hilbert de la fonction $R_{rs}(x, y)$ sur les deux variables x et y .

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à la phase de $\tilde{R}_{rs}(x, y)$ (notée $\phi(\tilde{R}_{rs}(x, y))$), qui sera une fonction dépendante de x et de y . Nous allons envisager deux cas possibles, évoqués dans ce qui suit, avec f_{c1} et f_{c2} des fréquences porteuses sur les deux directions.

1) Phase linéaire de type (III-3)

$$\phi(\tilde{R}_{rs}(x, y)) = 2\pi f_{c1}(x - \Delta_x) + 2\pi f_{c2}(y - \Delta_y) \quad (\text{III-3})$$

2) Phase linéaire de type (III-4)

$$\phi(\tilde{R}_{rs}(x, y)) = 2\pi f_{c1}(x - \Delta_x) - 2\pi f_{c2}(y - \Delta_y) \quad (\text{III-4})$$

Dans la partie introductive concernant l'échographie, nous avons vu que dans la direction axiale des images échographique nous retrouvons naturellement une porteuse à la

fréquence f_{c1} . Pour disposer d'une fréquence f_{c2} dans la direction latérale, un post traitement sur les images échographique est nécessaire [Chen-04]. Il existe aussi des méthodes qui introduisent une porteuse latérale en agissant directement sur la formation de voies de l'échographe [Lieb-05].

Nous allons traiter les deux cas ci-dessus de la même manière, en minimisant l'erreur quadratique entre les données et les formes imposées par les relations (III-3) respectivement (III-4).

1) L'erreur quadratique dans le premier cas s'écrit sous la forme :

$$\sum_x \sum_y \left[2\pi f_{c1}(x - \Delta_x) + 2\pi f_{c2}(y - \Delta_y) - \hat{\phi}_1(x, y) \right]^2 \quad (\text{III-5})$$

où $\hat{\phi}_1(x, y)$ représente les valeurs accessibles par la mesure de la phase de la fonction d'inter-corrélation complexe.

A partir de l'équation (III-5), nous essayons de trouver des expressions analytiques du couple (Δ_x, Δ_y) . Minimiser (III-5) revient à annuler sa dérivée par rapport à Δ_x ou à Δ_y , qui sont nos inconnues dans ce cas. Nous observons facilement que les deux dérivées ont strictement la même expression et en les annulant nous obtenons :

$$\sum_x \sum_y \left[2\pi f_{c1}(x - \hat{\Delta}_x) + 2\pi f_{c2}(y - \hat{\Delta}_y) - \hat{\phi}_1(x, y) \right] = 0 \quad (\text{III-6})$$

avec $(\hat{\Delta}_x, \hat{\Delta}_y)$ le couple des valeurs estimées de (Δ_x, Δ_y) .

En notant x et y :

$$\begin{aligned} x &= k \cdot x_0 & \text{avec } k &= \overline{0, N} \\ y &= l \cdot y_0 & l &= \overline{0, M} \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

la relation (III-6) devient :

$$\sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M \left[2\pi f_{c1}(k \cdot x_0 - \hat{\Delta}_x) + 2\pi f_{c2}(l \cdot y_0 - \hat{\Delta}_y) - \hat{\phi}_1(k, l) \right] = 0 \quad (\text{III-8})$$

Nous en déduisons par calcul une première équation liant $\hat{\Delta}_x$ et $\hat{\Delta}_y$:

$$2\pi f_{c1} \hat{\Delta}_x + 2\pi f_{c2} \hat{\Delta}_y = \pi f_{c1} x_0 N + \pi f_{c2} y_0 M - \frac{1}{(M+1)(N+1)} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M \hat{\phi}_1(k, l) \quad (\text{III-9})$$

2) Le deuxième cas est analogue au premier. Les calculs sont menés de la même façon, avec l'expression de la phase de la fonction d'inter-corrélation complexe (III-4). Cette fois-ci les valeurs mesurées de la phase sont notées $\hat{\phi}_2(x, y)$. Toujours en minimisant l'erreur quadratique entre les mesures et la forme prédite de la phase, nous en déduisons une deuxième équation avec le couple $(\hat{\Delta}_x, \hat{\Delta}_y)$ comme inconnues (III-10).

$$2\pi f_{c1} \hat{\Delta}_x - 2\pi f_{c2} \hat{\Delta}_y = \pi f_{c1} x_0 N - \pi f_{c2} y_0 M - \frac{1}{(M+1)(N+1)} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M \hat{\phi}_2(k, l) \quad (\text{III-10})$$

(III-9) et (III-10) forment un système de deux équations avec deux inconnues $(\hat{\Delta}_x, \hat{\Delta}_y)$, d'où :

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_x &= \frac{N \cdot x_0}{2} - \frac{1}{4\pi f_{c1} (M+1)(N+1)} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M [\hat{\phi}_1(k, l) + \hat{\phi}_2(k, l)] \\ \hat{\Delta}_y &= \frac{M \cdot y_0}{2} - \frac{1}{4\pi f_{c2} (M+1)(N+1)} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M [\hat{\phi}_2(k, l) - \hat{\phi}_1(k, l)] \end{aligned} \quad (\text{III-11})$$

IV. Validation de l'estimateur par ajustement de phase

1. Estimateur 1D par ajustement de la phase

a) Partie théorique

En 1D nous avons à estimer une seule composante de la translation, donc une seule mesure de la phase de la fonction de corrélation complexe suffit. Il s'agit de minimiser l'erreur quadratique (voir (IV-1)) entre les données mesurées (la phase de la corrélation complexe entre les deux signaux) et la forme prédite de la phase (linéaire dans notre cas de figure).

$$\sum_x [2\pi f_c (x - \Delta_x) - \hat{\phi}(x)]^2, \quad (\text{IV-1})$$

où $\hat{\phi}(x)$ est la phase mesurée.

Il s'agit donc de trouver Δ_x qui minimise l'expression (IV-1). Par dérivation en fonction de Δ_x et en annulant cette dérivée, nous obtenons une forme analytique de Δ_x , qui sera la forme de l'estimateur en 1D (IV-2).

$$\hat{\Delta}_x = [\sum_x 2\pi f_c x - \sum_x \hat{\phi}(x)] / 2\pi f_c N, \quad (\text{IV-2})$$

avec $x \in [x_1, x_1 + N \cdot \frac{1}{F_e}]$

b) Résultats sur des signaux de synthèse

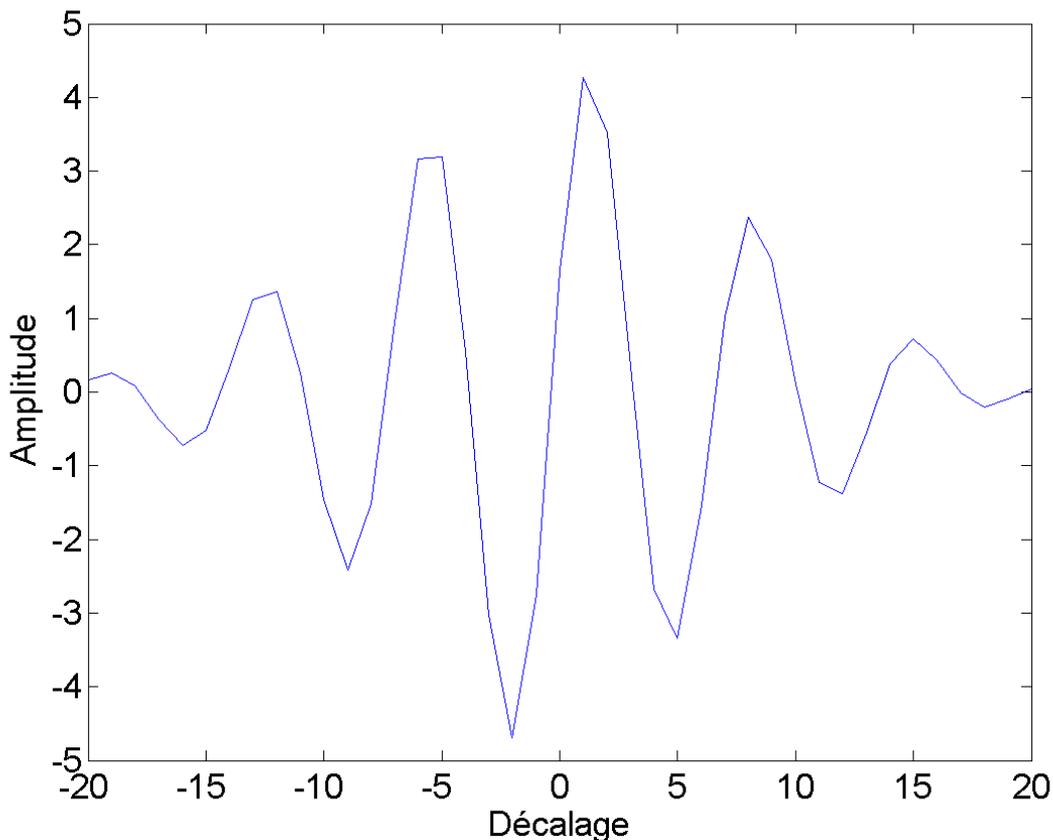
Pour valider cette méthode d'estimation de la translation 1D, nous sommes amenés à travailler sur des signaux dont leur forme assure une phase de la corrélation complexe linéaire (comme dans le cas d'une ligne de tir d'une image échographique). Il s'agit des gaussiennes modulées par des cosinus, les deux signaux étant des versions décalées (de Δ_x) l'un de l'autre (IV-3).

$$\begin{aligned} r(x) &= \cos(2\pi f_c x) \cdot \exp\left(-\pi \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2\right) \\ s(x) &= \cos[2\pi f_c (x - \Delta_x)] \cdot \exp\left(-\pi \left(\frac{x - \Delta_x}{\sigma_x}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (\text{IV-3})$$

Les performances de l'estimateur seront vues par comparaison avec celles d'un estimateur classique, par détection du pic de la fonction de corrélation.

Pour tester l'estimateur par ajustement de phase, nous considérons le jeu de données suivant (en fréquence normalisée) : $f_c = 1/7$; $F_e = 1$ (sept points par période) ; $\sigma_x = 28$; $x \in [1,21]$ (on considère un bout du signal, l'équivalent de 3 périodes) ; $\Delta_x = 1,4$ (décalage imposé entre les signaux r et s). L'échantillonnage des signaux est tout à fait réaliste, étant donné que dans les cas réels nous sommes amenés à estimer des décalages bien au-dessous de la taille d'un pixel (dans le cas considéré la partie fractionnaire de Δ_x est inférieure à $1/F_e$).

Avec les données ci-dessus, nous obtenons la corrélation des signaux r et s suivante :



La fonction de corrélation entre les signaux r et s (Figure IV-1) présente un maximum qui lui-même est une estimation de Δ_x . C'est par rapport à cette estimation que les résultats de l'estimateur par ajustement de la phase seront comparés.

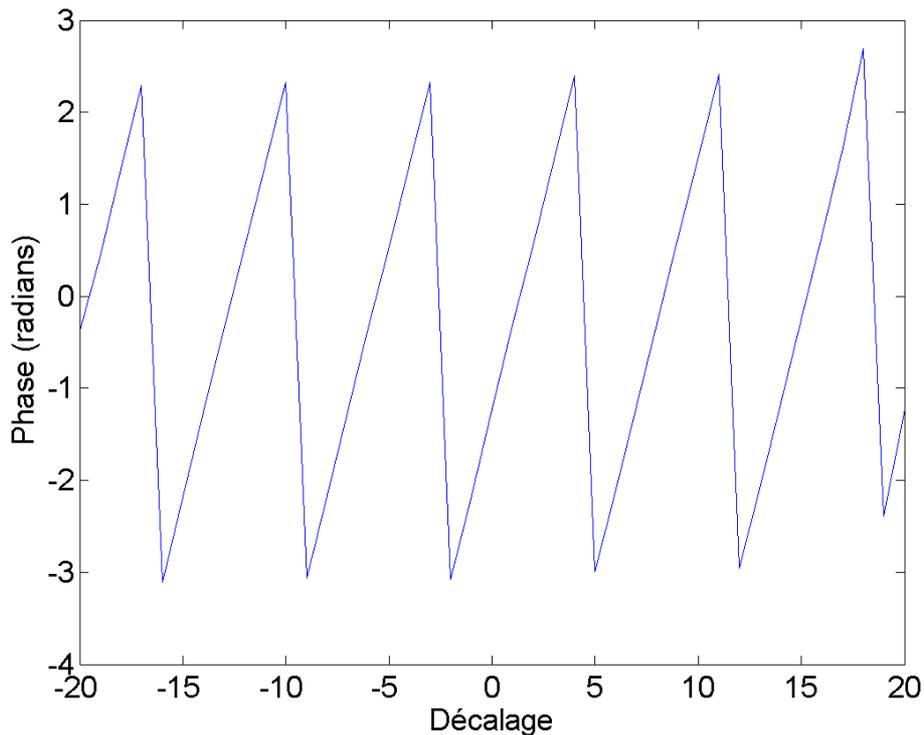


Figure IV-2 : Phase de la fonction de corrélation complexe des signaux r et s

La Figure IV-2 nous montre la linéarité de la phase. Il s'agit en fait d'une linéarité par morceaux étant donnée la périodicité des cosinus et le fait que la phase n'est pas déroulée (elle prend des valeurs entre $-\pi$ et π). Donc pour comparer la phase mesurée avec une phase théorique qui, elle, est linéaire sur tout le domaine, 2 méthodes sont envisageables. Une première approche consiste à utiliser un algorithme de déroulement de phase, qui rendrait la phase mesurée linéaire sur tout le domaine de calcul. Une deuxième approche est d'extraire un morceau linéaire de la phase de la Figure IV-2 (choisi suivant un critère à établir) et de travailler ensuite avec cet extrait de phase.

Etant donnée la complexité des algorithmes de déroulement (encore plus compliqué quand nous allons passer en 2D), la deuxième approche a été retenue.

L'extraction du morceau linéaire de la phase qui nous intéresse se fait en deux étapes :

- on détecte le maximum de la fonction de corrélation (qui lui-même est une estimation de Δ_x) ;
- on calcule numériquement la dérivée de la phase (Figure IV-3) et, en se plaçant autour du maximum repéré avant, on extrait la partie de la phase pour laquelle la dérivée ne chute pas.

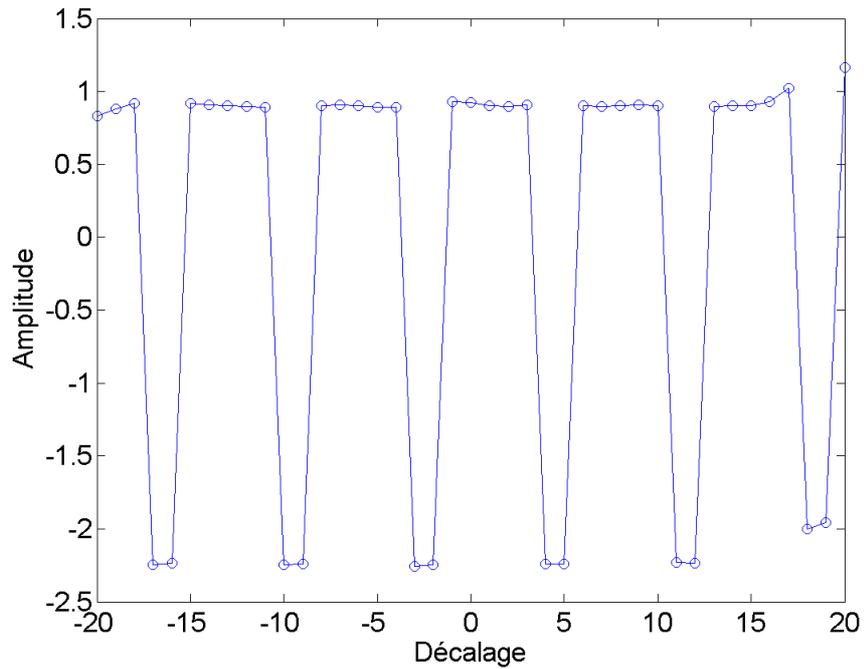


Figure IV-3 : Dérivée de la phase de la fonction de corrélation complexe entre les signaux r et s

La Figure IV-4 montre la partie de la phase mesurée que nous venons d'extraire et la phase théorique (qui correspond à $2\pi f_c(x - \Delta_x)$, avec le Δ_x imposé).

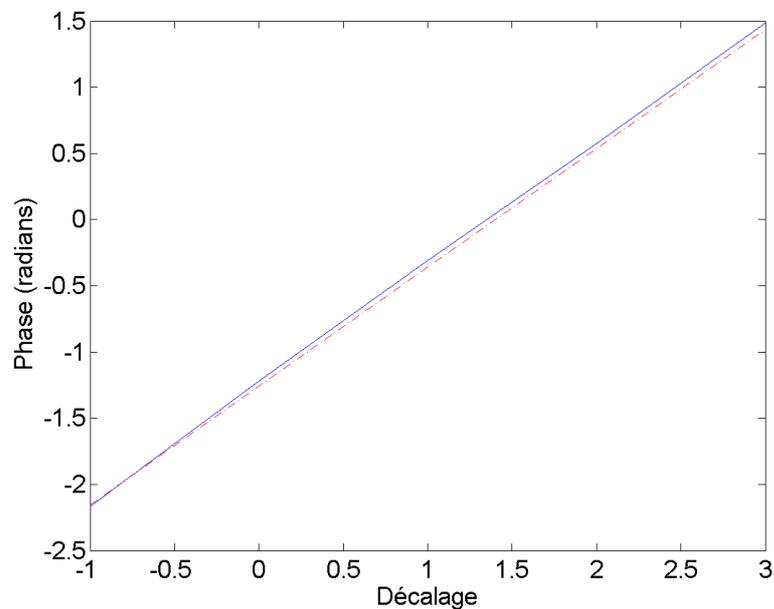


Figure IV-4 : Morceau linéaire de la phase mesurée (trait plein) et phase théorique (en pointillés) sur le même domaine de calcul

Pour les données présentées antérieurement (IV-3), l'estimateur donne $\hat{\Delta}_x = 1,3645$, alors que la valeur estimée par détection du pic de la corrélation est 1 (elle dépend en fait beaucoup de la fréquence d'échantillonnage. Pour une fréquence d'échantillonnage 10 fois plus grande, on trouverait 1,3). Nous pouvons constater que l'erreur entre la valeur de Δ_x imposée (1,4) et celle obtenue avec l'estimateur en question reste plus petite même dans le cas où la fréquence d'échantillonnage est 10 fois plus petite.

En terme d'erreur, nous trouvons avec l'estimateur par ajustement de phase une erreur relative de 2,5%, alors qu'avec le maximum de corrélation l'erreur monte à 28,5% (elle est de 7,14% dans le cas d'un sur échantillonnage d'un facteur 10).

Cependant, la Figure IV-4 montre un écart entre la courbe théorique et les mesures. Nous pouvons observer en simulation que ce biais diminue avec la valeur de Δ_x imposée. Donc l'estimation d'un Δ_x plus petit pourrait diminuer l'erreur d'estimation. D'où l'idée de travailler avec deux itérations, ce qui est possible de deux façons différentes.

- I) On fait une première estimation par détection du pic de corrélation, on recadre les deux signaux en fonction de cette première estimation et sur les deux signaux recadrés nous appliquons l'estimateur par ajustement de phase. Le Δ_x final sera la somme des deux estimations.
- II) On procède toujours en deux itérations et en recadrant les signaux entre les deux, mais cette fois-ci nous utilisons deux fois l'estimateur par ajustement de phase.

I) Résultats

Sur les mêmes signaux décrits auparavant (voir Figure IV-5) et avec le même jeu de données nous obtenons les résultats ci-dessous :

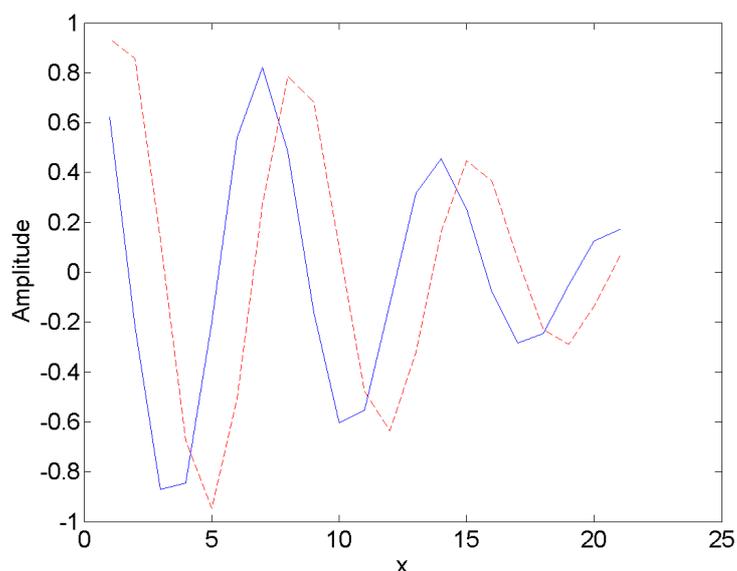


Figure IV-5 : Signaux r (trait plein) et s (en pointillés) initiaux

Le maximum de corrélation entre les deux signaux nous donne une première indication sur le décalage existant entre r et s. Nous obtenons dans ce cas une première

estimation du Δ_x de 1. On recadre le signal s en prenant en compte cette estimation et on obtient les signaux suivants :

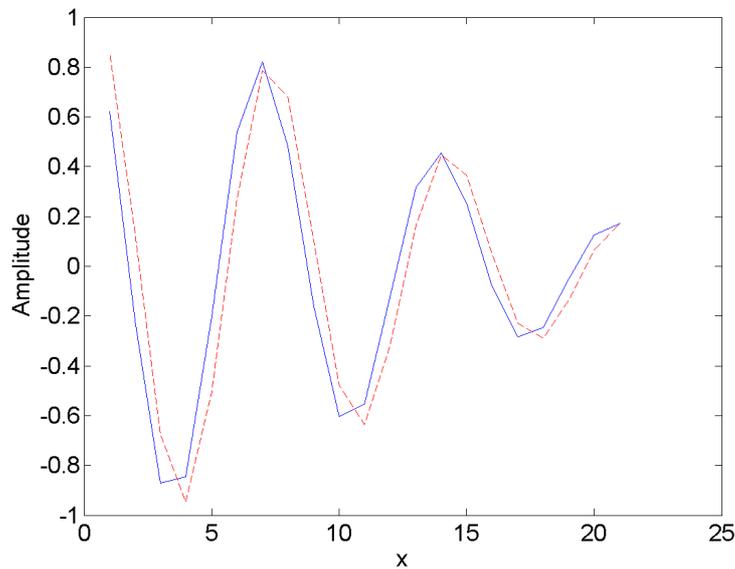


Figure IV-6 : Signal r (trait plein) et signal s (en pointillés) recadré

C'est sur les deux signaux de la Figure IV-6 que nous appliquons l'estimateur par ajustement de phase, qui nous donne $\Delta_x = 0,41$. En additionnant ces deux résultats, nous trouvons une estimation finale du Δ_x de 1,41, qui s'avère à être meilleure que celle obtenue avec l'estimateur tout seul (cette fois-ci l'erreur relative est de 0,7%).

II) Résultats

Nous faisons dans ce cas la même démarche que dans le cas I), mais en utilisant deux fois l'estimateur en question. Une première estimation par ajustement de la phase nous donne 1,3645, une deuxième (après avoir recadré les signaux) donne 0,0369, et donc nous obtenons un Δ_x estimé final de 1,4015. Dans ce cas, l'erreur relative est de 0,1%.

c) Estimateur 1D itératif par ajustement de la phase – partie théorique

Comme nous venons de le voir, le fait de faire deux itérations améliore considérablement l'estimation. Cette amélioration vient du fait qu'à chaque itération nous réduisons le biais qui existe entre la phase théorique et celle mesurée. Nous avons constaté que ce biais est d'autant plus petit que le décalage entre les signaux est plus petit. Analytiquement, nous pouvons démontrer que réduire ce biais implique directement la réduction du biais de l'estimation. Dans ce qui suit, $\hat{\Delta}_x^{(i)}$ dénote l'estimée de Δ_x à l'itération i . Comme nous l'avons vu dans la partie théorique concernant l'estimateur 1D, $\hat{\Delta}_x^{(i)}$ vérifie la relation suivante :

$$2\pi f_c \sum_x x = 2\pi f_c N \hat{\Delta}_x^{(i)} + \sum_x \phi(x) \quad (\text{IV-4})$$

Si maintenant nous introduisons un biais sur la phase mesurée, l'équation (IV-4) devient :

$$2\pi f_c \sum_x x = 2\pi f_c N \hat{\Delta}_x^{(i)} + \sum_x \phi(x) - \sum_x B^{(i)}(x), \quad (\text{IV-5})$$

avec $\phi(x)$ la phase théorique et $B^{(i)}(x)$ le biais entre la phase théorique et la phase mesurée à l'itération i . La relation (IV-5) nous donne la forme de l'estimateur itératif par ajustement de phase :

$$\hat{\Delta}_x^{(i)} = \frac{2\pi f_c \sum_x x - \sum_x \phi(x) + \sum_x B^{(i)}(x)}{2\pi f_c N} = \hat{\Delta}_x^{(i-1)} + \frac{\sum_x B^{(i)}(x) - \sum_x B^{(i-1)}(x)}{2\pi f_c N} \quad (\text{IV-6})$$

Comme $\phi(x)$ est la phase théorique, elle correspond à Δ_x imposé, donc la relation (IV-6) devient :

$$\hat{\Delta}_x^{(i)} = \Delta_x - \frac{\sum_x B^{(i)}(x)}{2\pi f_c N} \quad (\text{IV-7})$$

L'égalité ci-dessus montre clairement que le biais de l'estimation dépend directement du biais sur la phase. On observe que si au fil des itérations le biais $B^{(i)}(x)$ décroît, alors l'estimation $\hat{\Delta}_x^{(i)}$ s'approche de plus en plus de la vraie valeur imposée.

En simulation, sur les données utilisées avant, en trois itérations l'estimateur donne la valeur exacte du décalage entre les deux signaux r et s .

d) Analyse statistique de l'estimateur 1D itératif

L'analyse statistique de l'estimateur itératif est faite pour un estimateur qui comporte 3 itérations. Pour ce-là, nous utilisons les deux mêmes signaux qu'auparavant, mais cette fois-ci accompagnés d'un bruit blanc additif, gaussien, centré, et pour des rapports signal à bruit RSB variables (allant de 4 dB jusqu'à 52 dB). Pour chaque valeur du RSB, on fait 500 essais et on garde la valeur moyenne et l'écart type. Les résultats obtenus avec cet estimateur sont à comparer avec ceux obtenus par le pic de la corrélation (Figure IV-7).

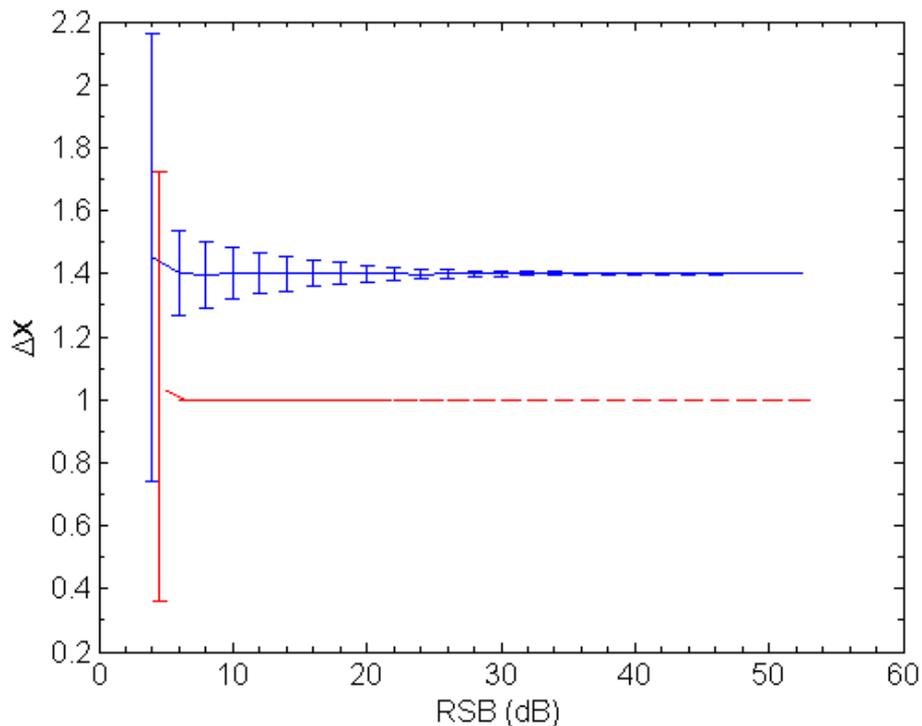


Figure IV-7 : Valeur moyenne et écart type de l'estimation du décalage Δ_x par maximum de la corrélation (en pointillés) et de l'estimation avec l'estimateur par ajustement de phase (trait plein) en fonction du RSB. La vraie valeur à estimer est 1,4.

Le tableau ci-dessous regroupe les différents résultats que nous avons trouvés en une dimension.

Méthode d'estimation	Valeur vraie	Valeur estimée	Erreur relative (%)
Maximum de corrélation	1.4	1	28.5
Maximum de corrélation : sur échantillonnage de facteur 10	1.4	1.3	7.14
Estimateur par ajustement de la phase : 1 itération	1.4	1.3645	2.5
Estimateur par ajustement de la phase : 2 itérations	1.4	1.4015	0.1
Estimateur par ajustement de la phase : 3 itérations	1.4	1.3999	0.007

Figure IV-8 : Tableau comparatif des estimations 1D

2. Estimateur 2D par ajustement de la phase

a) Résultats sur des images de synthèse

Comme dans le cas 1D, les performances de l'estimateur 2D seront vues par comparaison avec celles d'un estimateur classique, par détection du pic de la corrélation. Les signaux 2D qui seront considérés sont des gaussiennes modulées par des cosinus dans les deux directions (voir Figure IV-9), les deux étant des versions décalées de Δ_x , respectivement Δ_y .

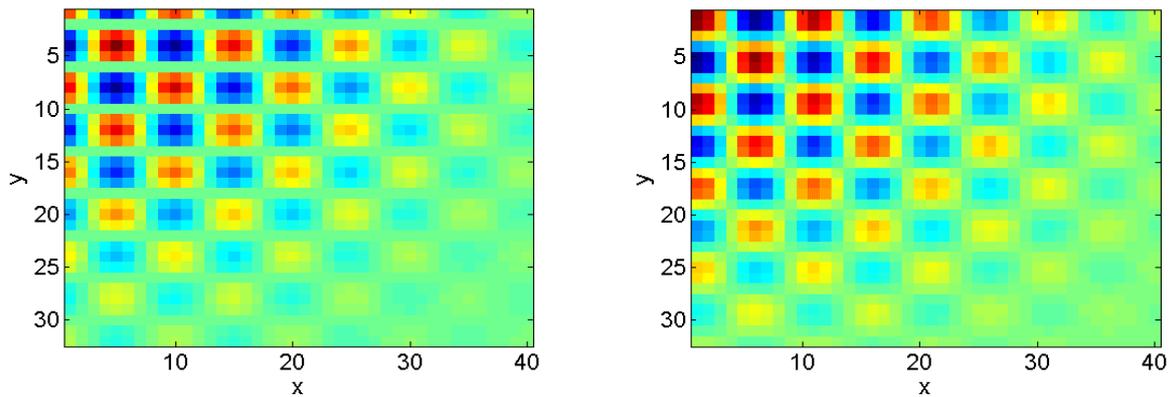


Figure IV-9 : Signaux r (gauche) et s (droite)

Les images de synthèse r et s de la Figure IV-9 ont la forme :

$$\begin{aligned}
 r(x) &= \cos(2\pi f_x x) \cdot \cos(2\pi f_y y) \cdot \exp\left(-\pi \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2\right) \cdot \exp\left(-\pi \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right) \\
 s(x) &= \cos[2\pi f_x (x - \Delta_x)] \cdot \cos[2\pi f_y (y - \Delta_y)] \cdot \exp\left(-\pi \left(\frac{x - \Delta_x}{\sigma_x}\right)^2\right) \cdot \exp\left(-\pi \left(\frac{y - \Delta_y}{\sigma_y}\right)^2\right)
 \end{aligned}
 \tag{IV-8}$$

avec : $f_x = 1/10$, $f_y = 1/8$, $\sigma_x = 50$, $\sigma_y = 40$, $x = \overline{1,40}$, $y = \overline{1,32}$. Les pas sur les deux directions x et y sont $1/Fe1$, respectivement $1/Fe2$, avec $Fe1 = Fe2 = 1$ (toutes les fréquences sont normalisées).

Les décalages qu'on impose entre r et s sont $\Delta_x = 1,15$ dans la direction latérale et $\Delta_y = 1,45$ dans la direction axiale.

La corrélation 2D entre les deux images r et s nous donne le résultat de la Figure IV-10.

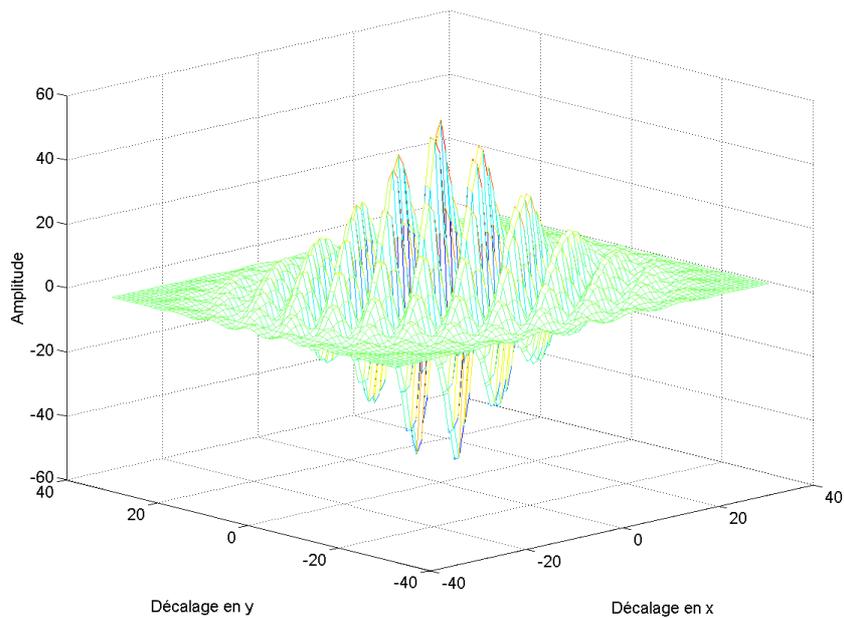


Figure IV-10 : Corrélation 2D des signaux r et s

Nous observons sur la Figure IV-10 que la corrélation entre les deux signaux comporte un maximum, qui donne une estimation des retards entre r et s et qui sera l'estimation par rapport à laquelle nous allons comparer les résultats de l'estimateur par ajustement de phase.

Comme décrit dans la partie théorique concernant l'estimateur 2D, nous allons utiliser la transformée de Hilbert pour passer à la fonction de corrélation complexe. En appliquant la transformée de Hilbert dans les deux directions, qu'on va noter H_{xy} , nous construisons la fonction de corrélation complexe, dont sa phase est montrée sur la Figure IV-11.

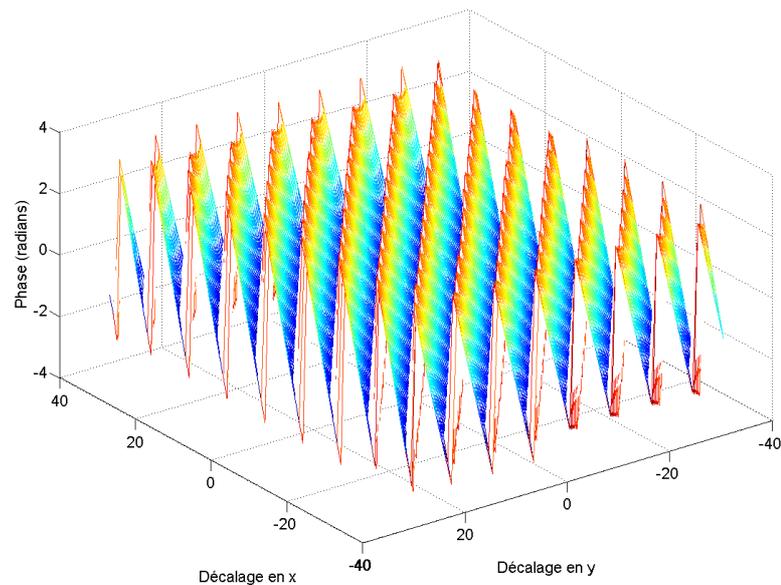


Figure IV-11 : Phase de la fonction de corrélation complexe des signaux r et s

Jusqu'ici, nous disposons d'une phase de la forme $2\pi f_x(x - \Delta_x) + 2\pi f_y(y - \Delta_y)$.

Comme montré dans la partie théorique, cela ne suffit pas pour estimer les retards entre r et s sur les deux directions, mais cela nous donne une première relation entre les deux. Pour en avoir une deuxième, une phase mesurée de la forme $2\pi f_x(x - \Delta_x) - 2\pi f_y(y - \Delta_y)$ est demandée. Celle-ci peut être obtenue toujours à partir de la fonction de corrélation et avec la transformée de Hilbert. Le raisonnement ci-dessous montre comment passer à une fonction complexe qui ait une phase avec une telle forme.

On va appeler \tilde{R}_- la fonction de corrélation complexe que nous voulons obtenir. Vu la forme de sa phase, elle doit avoir la forme :

$$\tilde{R}_-(x, y) = A(x, y) \cdot \exp(2\pi f_x(x - \Delta_x) - 2\pi f_y(y - \Delta_y)) \quad (\text{IV-9})$$

En développant la relation (IV-9), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_-(x, y) = & A(x, y) \cdot [\cos(2\pi f_x(x - \Delta_x)) \cdot \cos(2\pi f_y(y - \Delta_y)) + \\ & + \sin(2\pi f_x(x - \Delta_x)) \cdot \sin(2\pi f_y(y - \Delta_y))] + \\ & + j \cdot A(x, y) [\sin(2\pi f_x(x - \Delta_x)) \cdot \cos(2\pi f_y(y - \Delta_y)) - \\ & - \cos(2\pi f_x(x - \Delta_x)) \cdot \sin(2\pi f_y(y - \Delta_y))] \end{aligned} \quad (\text{IV-10})$$

ce qui donne :

$$\tilde{R}_-(x, y) = R(x, y) + H_{xy}\{R(x, y)\} + j \cdot (H_x\{R(x, y)\} - H_y\{R(x, y)\}), \quad (\text{IV-11})$$

avec H_x et H_y les transformées de Hilbert dans la direction x et respectivement y, et $R(x, y)$ la fonction de corrélation des images r et s.

Il faut noter que la fonction de corrélation complexe qui donne une phase de la forme $2\pi f_x(x - \Delta_x) + 2\pi f_y(y - \Delta_y)$ (notée \tilde{R}_+ , voir Figure IV-11) est obtenue par une méthode similaire, suivant la relation (IV-12) :

$$\tilde{R}_+(x, y) = R(x, y) - H_{xy}\{R(x, y)\} + j \cdot (H_x\{R(x, y)\} + H_y\{R(x, y)\}) \quad (\text{IV-12})$$

La Figure IV-12 montre la phase de la fonction de corrélation complexe \tilde{R}_+ , de laquelle nous allons extraire un plan qui nous donnera une deuxième relation entre Δ_x et Δ_y .

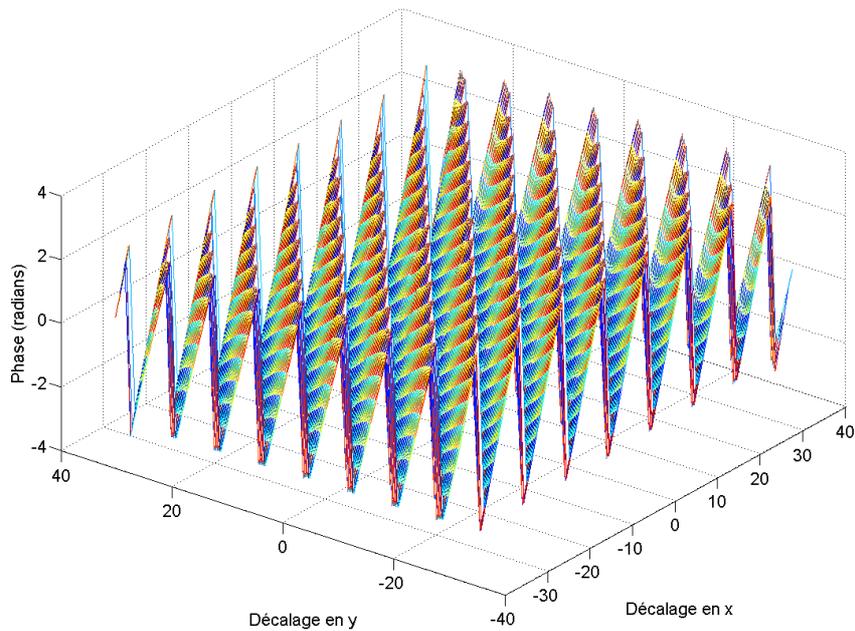


Figure IV-12 : Phase de la fonction de corrélation complexe \tilde{R}_-

Sur les phases de la Figure IV-12 et de la Figure IV-11, nous pouvons observer le même comportement qu'en 1D. Nous obtenons des phases linéaires (cette fois-ci dans les deux directions, donc des plans) par morceaux. En conséquence, l'estimateur 2D analytique ne va pas travailler sur toute la phase, mais sur un plan extrait autour du maximum de la corrélation. Le critère est toujours lié à la dérivée de la phase (voir Figure IV-13), nous allons extraire un morceau de phase telle que sa dérivée reste quasiment constante.

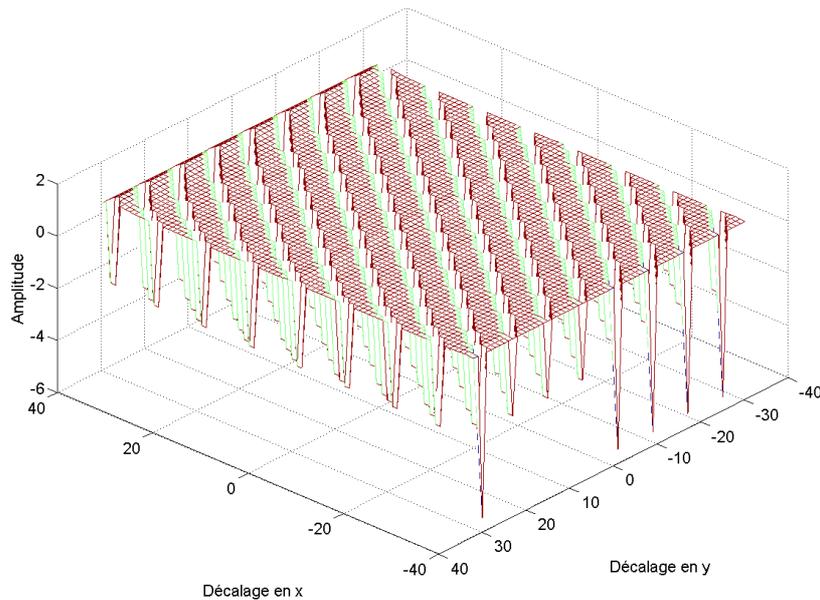


Figure IV-13 : Dérivée de la phase de la fonction de corrélation complexe \tilde{R}_+

Pour les données numériques évoquées antérieurement, l'estimateur par maximum de la corrélation donne 1 comme estimation de Δ_x et 1 pour Δ_y . C'est autour de ces valeurs qu'on va extraire les 2 plans de phase intéressants (voir Figure IV-14). 1 et 1 sont aussi les valeurs estimées dans ce cas par détection du pic de la corrélation (les erreurs relatives dans ce cas sont de 13%, respectivement de 31%). Il faut noter, comme en 1D, que si les fréquences d'échantillonnages dans les deux directions étaient 10 fois plus grandes, on aurait obtenu 1,1 et 1,3, ce qui reste toujours une estimation assez mauvaise.

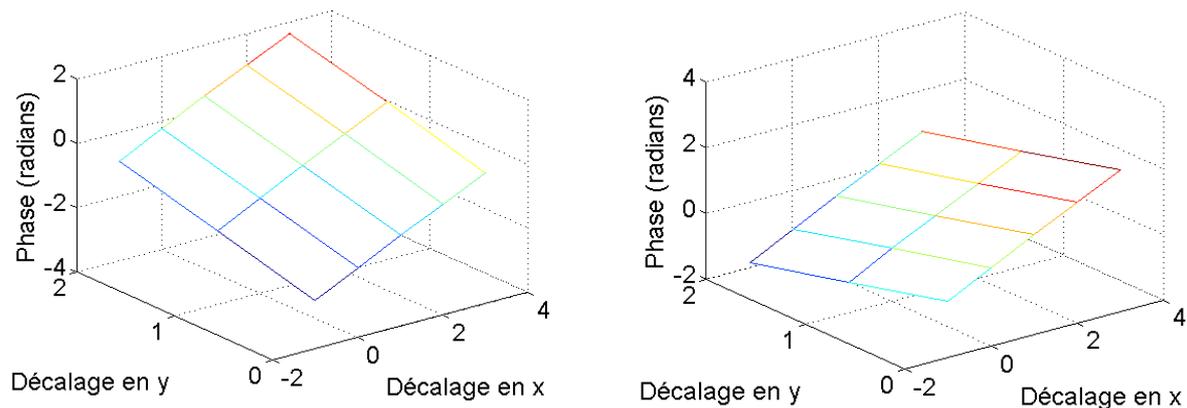


Figure IV-14 : Plans de phase extraits des mesures dans les deux cas de figure (\tilde{R}_+ à gauche et \tilde{R}_- à droite)

L'estimateur par ajustement de phase 2D (III-11) donne dans ce cas comme estimation de Δ_x et Δ_y 1,1082 respectivement 1,4075, soit des valeurs des erreurs relatives de 3,63% et de 2,93%.

b) Estimateur 2D itératif par ajustement de phase

Comme dans le cas 1D, nous pouvons observer un certain biais entre les mesures et les plans théorique de phase qu'on devrait obtenir. Ce biais introduit des erreurs d'estimation. Dans le cas 2D, le biais est présent beaucoup plus sur la phase de la fonction de corrélation complexe \tilde{R}_+ que sur \tilde{R}_- . Ce comportement est explicable étant donné que les biais qu'on retrouve en 1D s'ajoutent dans le premier cas, alors qu'ils s'annulent dans le deuxième cas.

Dans le cas 2D comme en 1D, ces biais sont d'autant plus petits que les décalages sur les deux directions entre les deux signaux sont petits. Cette considération nous mène à procéder comme en 1D, en deux itérations et en recadrant les signaux en fonction du résultat de l'itération d'avant.

- I) Dans ce cas la première estimation est faite par maximum de corrélation et la deuxième, après avoir recadré les signaux avec l'estimateur par ajustement de phase.

On trouve avec cette méthode 1,1518 pour Δ_x et 1,4538 pour Δ_y , donc on améliore considérablement l'estimation par détection du pic de la corrélation. Les erreurs relatives dans ce cas de figure sont de 0,16% et de 0,26%.

- II) Les deux itérations utilisent l'estimateur par ajustement de phase.

L'estimation de Δ_x et Δ_y est dans ce cas encore meilleure, les erreurs d'estimation étant encore plus petites que dans les cas d'avant. On trouve 1,1511 pour Δ_x et 1,4508 pour Δ_y , soient des erreurs relatives de 0,1% respectivement de 0,05%.

Il faut noter que dans ce cas, si nous faisons une troisième itération, en utilisant les résultats des itérations antérieures de la même manière, nous retrouvons exactement les valeurs des retards imposées, donc nous arrivons à complètement débiaiser l'estimation.

c) Estimateur 2D itératif par ajustement de la phase – partie théorique

Nous pouvons montrer aussi en 2D que la diminution du biais sur la phase (en 2D il s'agit des biais sur les deux plans de phase) implique une diminution du biais sur les estimations de Δ_x et Δ_y . Dans ce qui suit, $\hat{\Delta}_x^{(i)}$ et $\hat{\Delta}_y^{(i)}$ représentent les estimations à la i-ème itération. D'après la partie théorique concernant l'estimateur 2D, nous en déduisons qu'elles satisfont les deux relations ci-dessous :

$$2\pi f_x \sum_x \sum_y x + 2\pi f_y \sum_x \sum_y y = 2\pi f_x \sum_x \sum_y \hat{\Delta}_x^{(i)} + 2\pi f_y \sum_x \sum_y \hat{\Delta}_y^{(i)} + \sum_x \sum_y \hat{\phi}_1(x, y) \quad (\text{IV-13})$$

$$2\pi f_x \sum_x \sum_y x + 2\pi f_y \sum_x \sum_y y = 2\pi f_x \sum_x \sum_y \hat{\Delta}_x^{(i)} - 2\pi f_y \sum_x \sum_y \hat{\Delta}_y^{(i)} + \sum_x \sum_y \hat{\phi}_2(x, y)$$

Si maintenant on considère que les deux phases mesurées $\hat{\phi}_1(x, y)$ et $\hat{\phi}_2(x, y)$ sont biaisées, avec des biais que nous allons noter $B_1^{(i)}(x, y)$ et $B_2^{(i)}(x, y)$ (à la i-ème itération), les relations (IV-13) deviennent :

$$2\pi f_x \sum_x \sum_y x + 2\pi f_y \sum_x \sum_y y = 2\pi f_x \sum_x \sum_y \hat{\Delta}_x^{(i)} + 2\pi f_y \sum_x \sum_y \hat{\Delta}_y^{(i)} + \sum_x \sum_y \phi_1(x, y) + \sum_x \sum_y B_1^{(i)}(x, y) \quad (\text{IV-14})$$

$$2\pi f_x \sum_x \sum_y x + 2\pi f_y \sum_x \sum_y y = 2\pi f_x \sum_x \sum_y \hat{\Delta}_x^{(i)} - 2\pi f_y \sum_x \sum_y \hat{\Delta}_y^{(i)} + \sum_x \sum_y \phi_2(x, y) + \sum_x \sum_y B_2^{(i)}(x, y)$$

Les relations (IV-14) nous permettent d'exprimer les estimations $\hat{\Delta}_x^{(i)}$ et $\hat{\Delta}_y^{(i)}$ en fonction des vraies Δ_x et Δ_y et des biais sur les phases. Nous obtenons :

$$\hat{\Delta}_x^{(i)} = \Delta_x - \frac{\sum_x \sum_y B_1^{(i)}(x, y) + \sum_x \sum_y B_2^{(i)}(x, y)}{4\pi f_x \sum_x \sum_y 1} \quad (\text{IV-15})$$

$$\hat{\Delta}_y^{(i)} = \Delta_y - \frac{\sum_x \sum_y B_1^{(i)}(x, y) - \sum_x \sum_y B_2^{(i)}(x, y)}{2\pi f_y \sum_x \sum_y 1}$$

Les expressions ci-dessus montrent clairement que les biais sur les deux estimations sont directement influencés par les biais sur les mesures de phase. Et comme nous avons vu en simulation que ceux-ci sont d'autant plus petits que les décalages que nous voulons mesurer sont petits, nous pouvons en déduire qu'ils vont décroître au fil des itérations.

Toujours à partir des relations (IV-15), nous pouvons en déduire les expressions récursives de l'estimateur par ajustement de la phase itératif. Nous obtenons :

$$\hat{\Delta}_x^{(i)} = \hat{\Delta}_x^{(i-1)} + \frac{\sum_x \sum_y B_1^{(i-1)}(x, y) + \sum_x \sum_y B_2^{(i-1)}(x, y) - \sum_x \sum_y B_1^{(i)}(x, y) - \sum_x \sum_y B_2^{(i)}(x, y)}{4\pi f_x \sum_x \sum_y 1} \quad (\text{IV-16})$$

$$\hat{\Delta}_y^{(i)} = \hat{\Delta}_y^{(i-1)} + \frac{\sum_x \sum_y B_1^{(i-1)}(x, y) - \sum_x \sum_y B_2^{(i-1)}(x, y) - \sum_x \sum_y B_1^{(i)}(x, y) + \sum_x \sum_y B_2^{(i)}(x, y)}{2\pi f_y \sum_x \sum_y 1}$$

d) Analyse statistique de l'estimateur 2D itératif

Pour tester la performance de l'estimateur 2D itératif par ajustement de phase et pour observer son comportement en présence du bruit, nous allons faire le même type de simulation que dans le cas 1D. On ajoute alors sur les signaux r et s du bruit additif, gaussien, de telle façon que le rapport signal à bruit varie entre 4 dB et 52 dB. Pour chaque valeur du RSB, nous faisons 250 essais, afin de retenir la valeur moyenne des estimations et l'écart type. La Figure IV-15 et la Figure IV-16 montrent par comparaison les résultats obtenus avec l'estimateur par ajustement de phase et ceux obtenus avec l'estimateur par maximum de corrélation, pour Δ_x , respectivement pour Δ_y . Les résultats sont obtenus avec un estimateur qui comporte trois itérations.

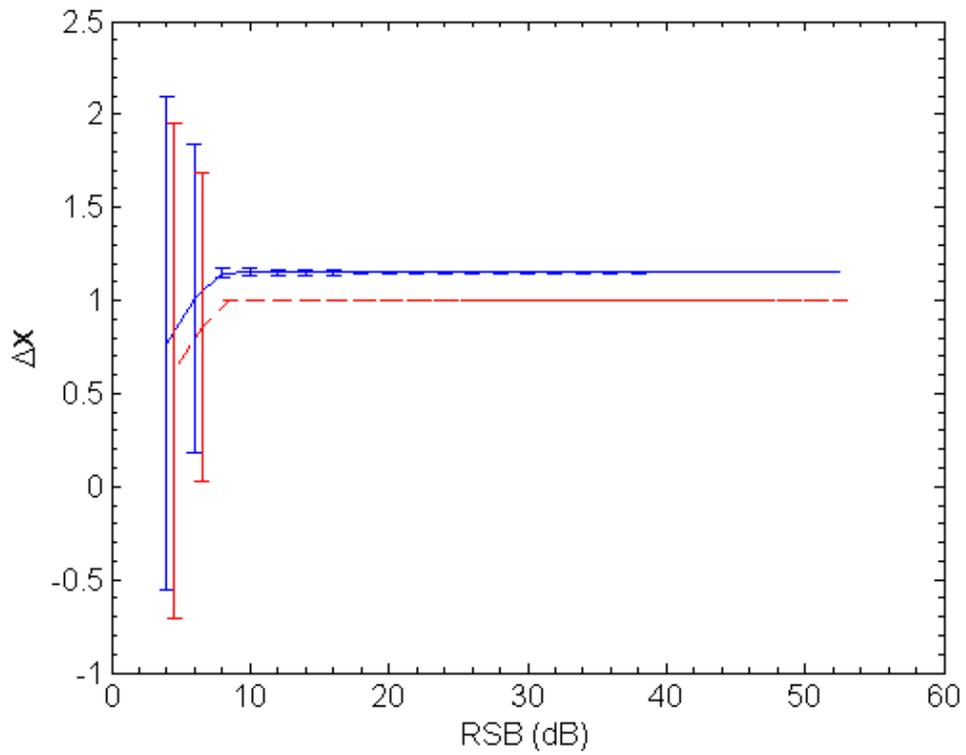


Figure IV-15 : Estimation de Δ_x avec l'estimateur par ajustement de phase 2D (trait plein) et par pic de la corrélation (en pointillés). La vraie valeur à estimer est 1,15.

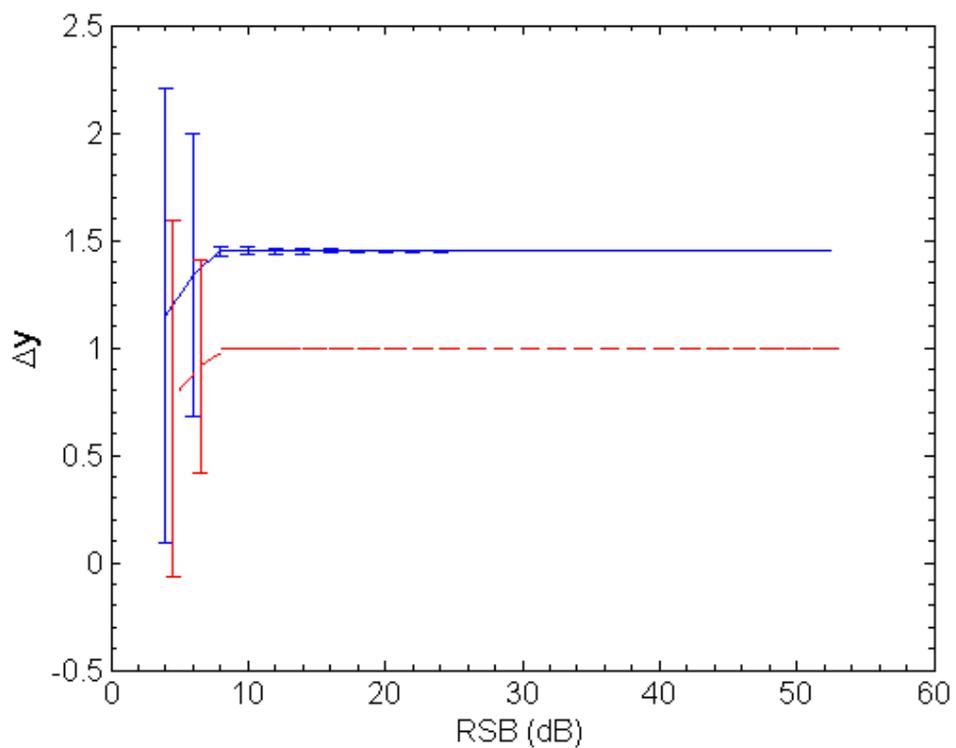


Figure IV-16 : Estimation de Δ_y avec l'estimateur par ajustement de phase 2D (trait plein) et par pic de la corrélation (en pointillés). La vraie valeur à estimer est 1,45.

Les deux tableaux récapitulatifs de la Figure IV-17 montrent les erreurs d'estimation pour les différentes méthodes testées. Nous observons clairement que l'estimateur par ajustement de la phase donne des meilleurs résultats. Les estimations s'améliorent aussi au fil des itérations.

Méthode d'estimation	Valeur vraie	Valeur estimée	Erreur relative (%)
Maximum de corrélation	1.15	1	13
Maximum de corrélation : sur échantillonnage d'un facteur 10	1.15	1.1	4.35
Estimateur par ajustement de la phase : 1 itération	1.15	1.1082	3.63
Estimateur par ajustement de la phase : 2 itérations	1.15	1.1511	0.1
Estimateur par ajustement de la phase : 3 itérations	1.15	1.15	0

(a)

Méthode d'estimation	Valeur vraie	Valeur estimée	Erreur relative (%)
Maximum de corrélation	1.45	1	31
Maximum de corrélation : sur échantillonnage d'un facteur 10	1.45	1.3	10.3
Estimateur par ajustement de la phase : 1 itération	1.45	1.4075	2.93
Estimateur par ajustement de la phase : 2 itérations	1.45	1.4508	0.05
Estimateur par ajustement de la phase : 3 itérations	1.45	1.45	0

(b)

Figure IV-17 : Comparatif des résultats des estimations : (a) Δ_x et (b) Δ_y

V. Application de l'estimateur par ajustement de la phase

Le chapitre IV montre le comportement de l'estimateur par ajustement de la phase sur des signaux de synthèse dont la forme était parfaitement maîtrisée. Dans ce qui suit, l'estimateur est implanté dans un algorithme de recherche par mise en correspondance de blocs, afin de pouvoir calculer des cartes de déplacements entre 2 images.

Afin de valider le nouvel estimateur, il doit être testé sur des images dont on connaît parfaitement le champ de déplacement. Pour cela, nous partons de deux images échographiques de simulation, obtenues par une approche système [Lieb-05]. Les deux images (Figure V-1) considérées représentent le même milieu avant et après une compression axialement appliquée. Le milieu en question présente une inclusion dure, avec des profils gaussiens dans les deux directions.

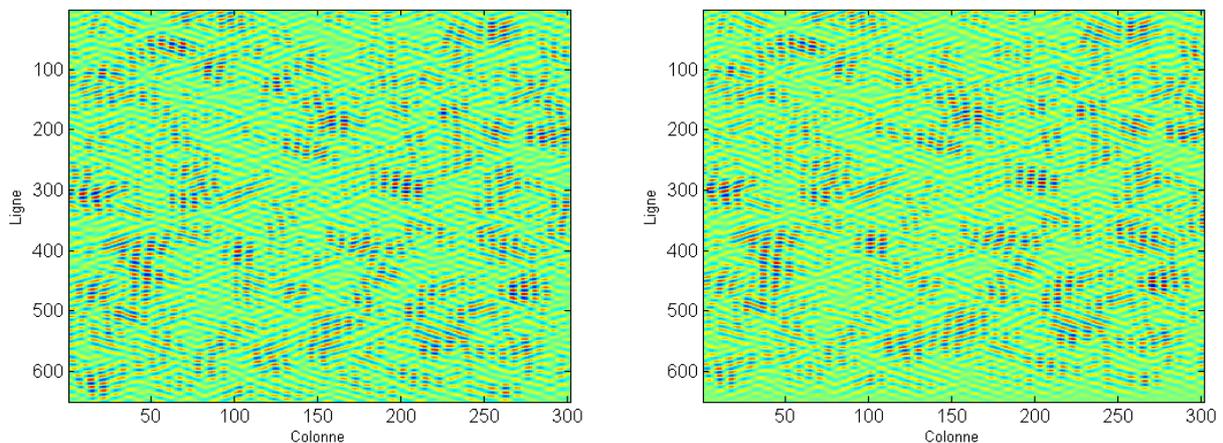


Figure V-1 : Images échographiques RF simulées, avec oscillations latérales, avant et après compression

La synthèse de ces deux images a été faite en utilisant une approche système, de telle façon à introduire des oscillations dans les deux directions, axiale et latérale. Pour ce-là, il faut modéliser mathématiquement à la fois le milieu et le système d'imagerie (la réponse impulsionnelle de l'échographe) [Lieb-05].

Dans le cas en question le milieu considéré consiste en une répartition discrète 2D des diffuseurs spatialement décorrelés (V-1).

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^N A_i \delta(x - x_i, y - y_i) \quad (\text{V-1})$$

où $[x_i, y_i]$ est la position du i -ème diffuseur et N le nombre total de diffuseurs. Les deux coordonnées des diffuseurs sont des distributions uniformes, alors que les amplitudes A_i peuvent être des distributions gaussiennes.

Le deuxième paramètre impliqué dans la construction des images échographiques simulées est la réponse impulsionnelle du système, qui est définie par l'image qu'on obtiendrait avec un seul diffuseur. Cette fonction 2D que nous allons noter $h(x, y)$ sera considérée séparable suivant les deux directions, comme montre la relation (V-2).

$$h(x, y) = h_x(x)h_y(y) \quad (\text{V-2})$$

L'image échographique finale est la convolution entre $d(x, y)$ et $h(x, y)$ et sera notée $r(x, y)$.

$$r(x, y) = h(x, y) \otimes_{x,y} d(x, y) \quad (\text{V-3})$$

La Figure V-1 montre les deux images échographiques avant et après déplacement. L'image du milieu qui décrit l'image après déplacement (notée $d'(x, y)$) s'exprime en fonction de celle de la première par l'expression (V-4) :

$$d'(x, y) = d(x - \Delta_x, y - \Delta_y) \quad (\text{V-4})$$

où le couple $[\Delta_x, \Delta_y]$ représente les déplacements des diffuseurs dans les deux directions. Nous obtenons donc par convolution l'expression de l'image après déplacement, notée $s(x, y)$:

$$s(x, y) = h(x, y) \otimes_{x,y} d'(x, y) = h(x, y) \otimes_{x,y} d(x - \Delta_x, y - \Delta_y) = r(x - \Delta_x, y - \Delta_y) \quad (\text{V-5})$$

Dans le cas des images évoquées ci-dessus, la réponse impulsionnelle du système considérée a la forme d'une gaussienne modulée par un cosinus sur les deux directions x et y . Nous obtenons ainsi la forme mathématique suivante :

$$h(x, y) = \cos\left(2\pi \cdot x \frac{1}{l_x}\right) \exp\left(-\pi \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot y \frac{1}{l_y}\right) \exp\left(-\pi \left(\frac{y}{\sigma_y}\right)^2\right) \quad (\text{V-6})$$

avec $l_x = 1,5mm$ et $l_y = 0,2mm$ les périodes dans les directions latérale et axiale.

$\sigma_x = \frac{1,5 \cdot l_x}{1,2} = 1,875mm$ et $\sigma_y = \frac{3 \cdot l_y}{1,2} = 0,5mm$ sont les écarts type des deux gaussiennes.

La Figure V-2 montre comme la compression sur le milieu en question est faite. Nous pouvons observer ainsi que la compression se fait directement avec la sonde échographique, ainsi que l'inclusion dure qui se trouve dans le milieu étudié.

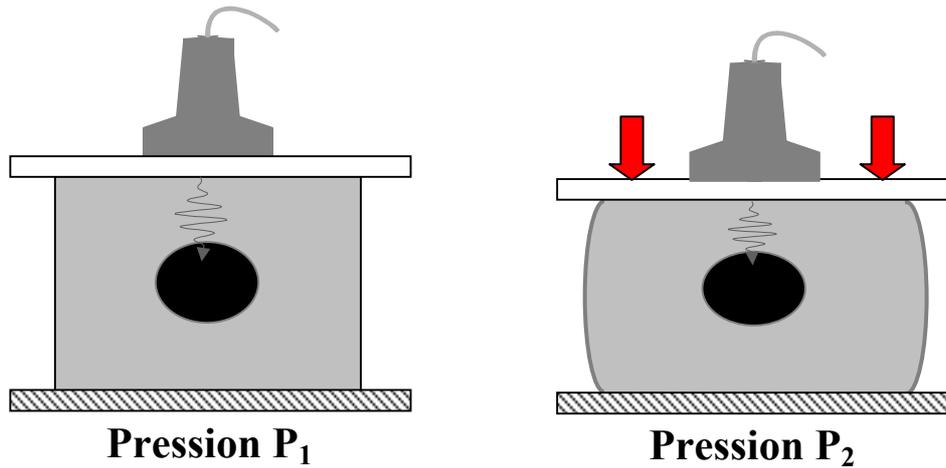


Figure V-2 : Milieu avant et après compression

La Figure V-3 montre les cartes des déplacements axiaux et latéraux imposées. Sur les deux nous observons l'inclusion dure et le fait qu'il s'agit d'une compression axiale et d'une dilatation latérale.

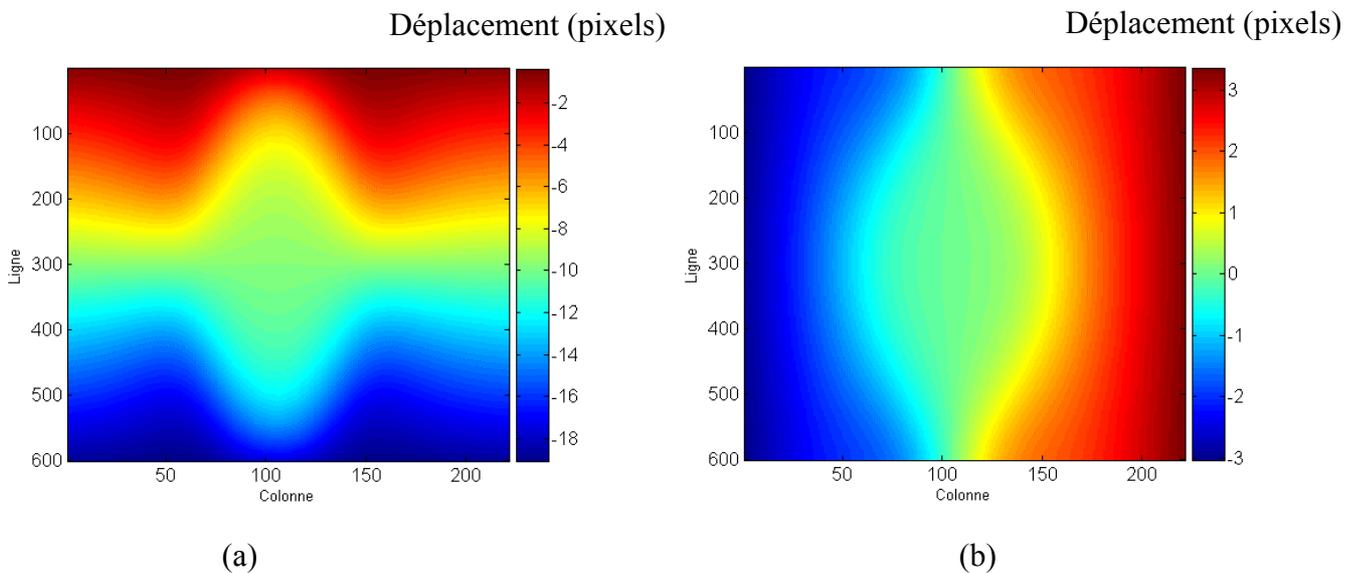


Figure V-3 : Cartes des déplacements vrais, (a) en axial et (b) en latéral

Le but est de retrouver par estimation les deux cartes de déplacements en utilisant l'estimateur par ajustement de la phase. Pour ce-là nous allons appliquer un algorithme par mise en correspondance de blocs, dont la recherche locale du déplacement est assurée par le nouvel estimateur. La Figure V-4 donne les estimations que nous obtenons ainsi. Il faut noter que les résultats sont obtenus sans interpoler les images échographiques et en prenant des blocs de taille 30x30 pixels en axial et en latéral.

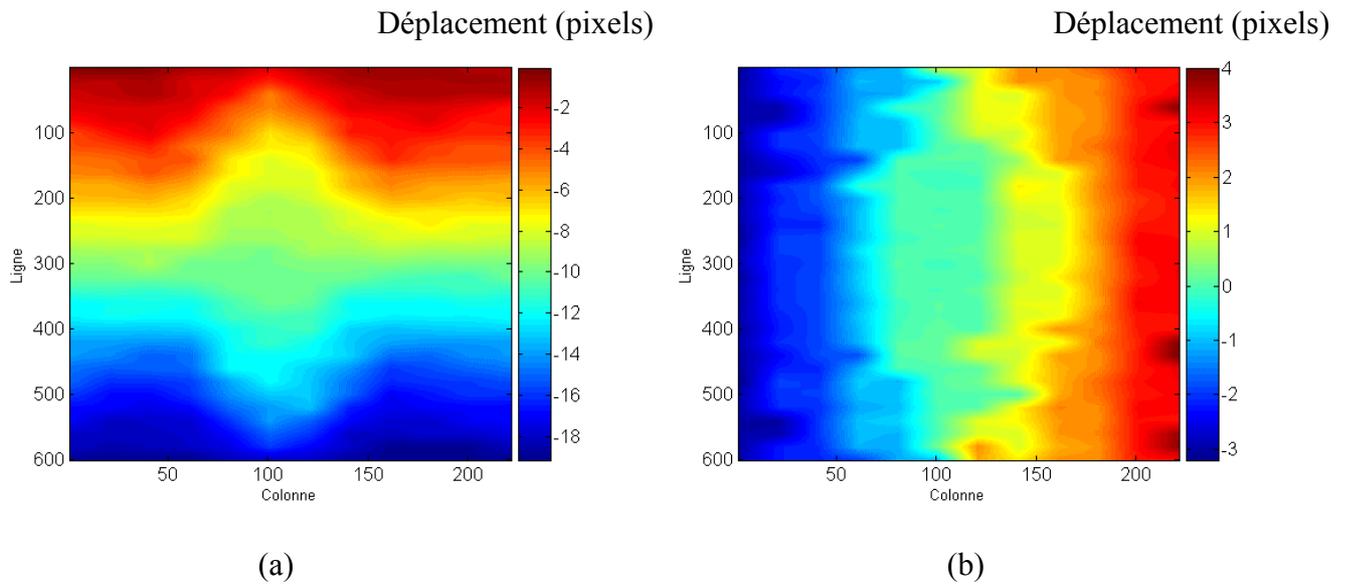


Figure V-4 : Cartes des déplacements estimés, (a) en axial et (b) en latéral

Les vraies cartes de déplacements, ainsi que celles obtenues par estimation, nous permettent de représenter les déplacements sous forme vectorielle. La Figure V-5 donne d'une part la cartes des déplacements imposés et d'autre part celle estimée.

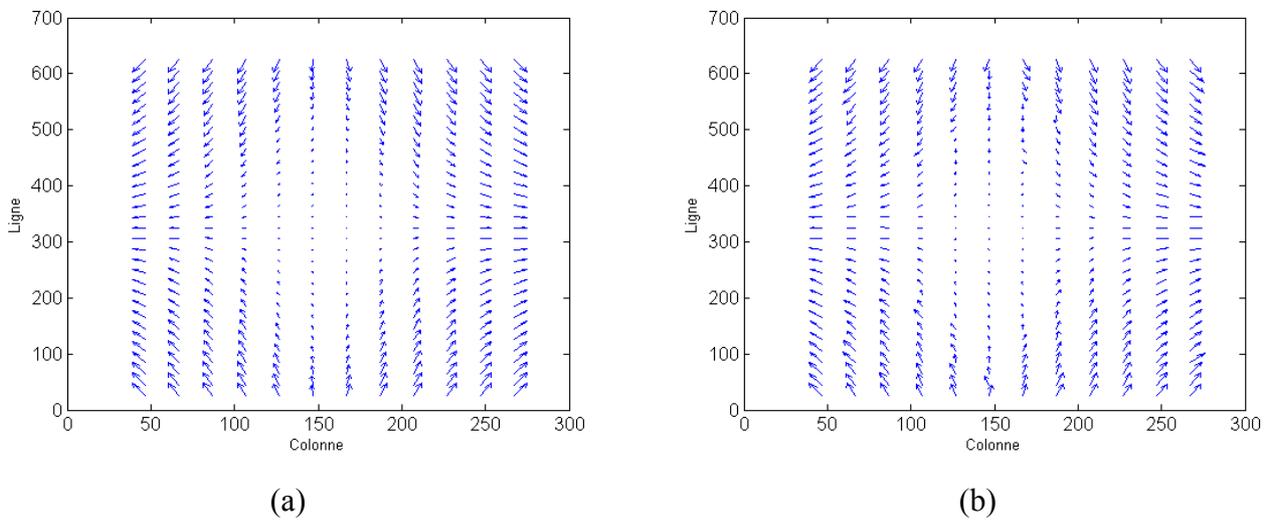


Figure V-5 : Représentation vectorielle du déplacement (a) vrai, (b) estimé

La Figure V-6 représente l'erreur commise lors de l'estimation et permet de localiser spatialement les endroits où les erreurs d'estimation sont les plus importantes.

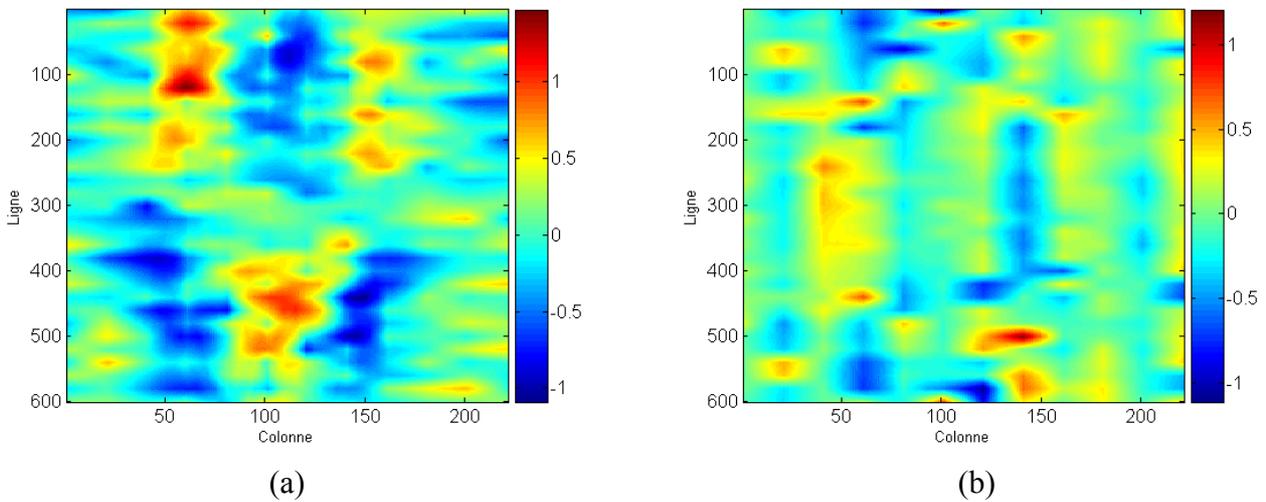


Figure V-6 : Erreurs dans l'estimation du déplacement (a) axial, (b) latéral, en pixels

Numériquement, l'erreur moyenne absolue est de 0.25 pixels en axial et de 0.17 pixels en latéral. Il faut noter qu'avec un algorithme de mise en correspondance de blocs classique, basé sur le maximum de corrélation, et avec un facteur d'interpolation 3 dans les images sur les deux directions, nous obtenons des erreurs de 0.45 pixels axialement et 0.32 pixels pour l'estimation latérale. Nous pouvons ainsi observer que l'utilisation de l'estimateur par ajustement de la phase arrive à diviser les erreurs d'estimation par deux, et ce-là sans utiliser d'interpolation.

La Figure V-7 donne une autre représentation des erreurs commises lors de l'estimation, sous la forme de deux histogrammes.

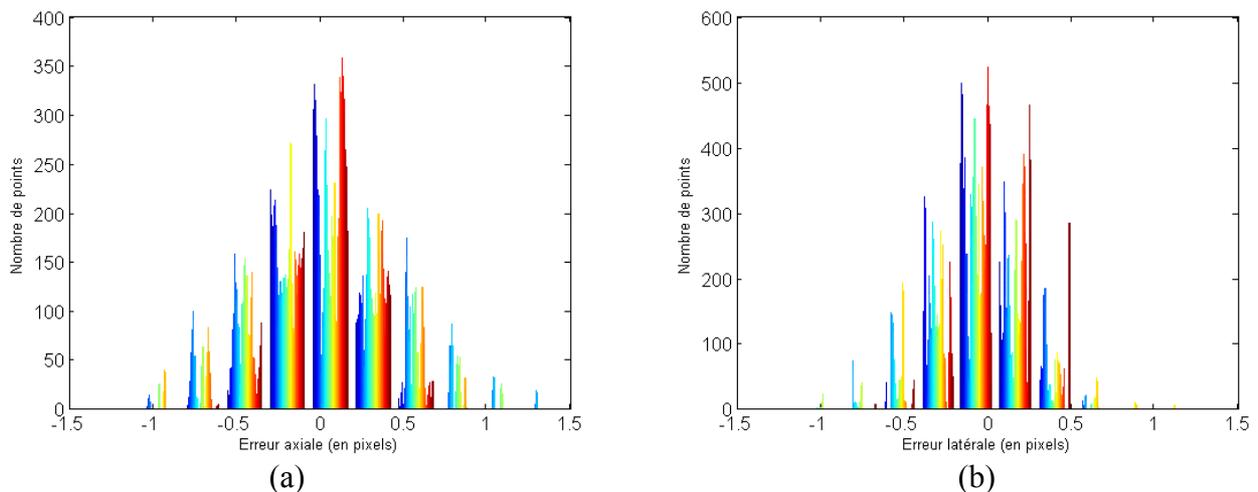


Figure V-7 : Histogrammes des erreurs dans l'estimation du champ de déplacement (a) axial, (b) latéral

Les deux histogrammes ci-dessus montrent que la valeur moyenne dans les deux cas est très proche de 0, avec des écarts type de 0.34 pixels pour l'estimation axiale et 0.22 pour celle latérale.

VI. Améliorations envisageables

D'après les résultats présentés dans le chapitre IV, il s'avère que l'estimateur par ajustement de la phase est plus précis qu'un estimateur classique. Il garde une meilleure précision même pour des fréquences d'échantillonnage plus basses, d'où la possibilité d'utiliser des facteurs d'interpolation plus petits. Nous pouvons donc attendre, au-delà d'une meilleure précision, des temps de calculs plus petits.

L'estimateur travaille sur la phase de la fonction de corrélation complexe. On se sert en fait uniquement d'une partie de la phase (une droite en 1D et un plan en 2D). Comme en élastographie les déplacements qu'on cherche sont très petits (souvent bien plus petits que la taille d'un pixel, vu les résolutions axiale et latérale des images échographiques), nous pouvons imaginer une méthode qui calculerait la corrélation sur un domaine beaucoup plus restreint. Cette astuce réduirait considérablement le temps de calcul, tout en gardant exactement la même précision.

La prochaine étape de validation de l'estimateur est de l'implanter dans un algorithme d'estimation du champ des déplacements entre deux images échographiques plus complexe, qui englobe un modèle de déplacement (bilinéaire par exemple [Laco-04]). On peut s'attendre que l'amélioration apportée en terme de performances d'estimation puisse nous aider à mieux exploiter les cartes des déplacements, afin de fournir des cartes de déformations plus précises et même des cartes des propriétés élastiques du milieu (comme le module de Young par exemple) [Nitta-02].

VII. Conclusion

En élastographie, l'estimation du champ de déplacements entre deux images échographiques soumises à deux niveaux de compression est la première étape vers la cartographie des caractéristiques élastiques tissulaires (dureté des tissus).

Ce travail visait à proposer une méthode innovante d'estimation du déplacement, permettant d'estimer le déplacement 1D ou 2D entre deux images échographiques. L'originalité réside dans le fait d'utiliser non plus le passage par zéro de la phase de la fonction de corrélation complexe, mais de minimiser l'erreur quadratique entre la phase mesurée et la forme attendue, compte tenu de la forme des signaux. La méthode s'avère très utile étant données la résolution faible des images échographiques, comparée aux déplacements qu'on cherche à estimer, qui eux, sont très petits, souvent sub-pixéliques.

La qualité des champs des déplacements que nous pouvons espérer avoir en utilisant l'estimateur par ajustement de phase sera sans doute un point de départ pour la reconstruction des cartes des propriétés élastiques des milieux étudiés.

Bibliographie

- [Akiy-86] I. AKIYAMA, A. HAYAMA, M. NAKAJIMA
Movement analysis of soft tissues by speckle patterns' fluctuation. JSUM Proc. (1986) 615–616.
- [Bohs-00] L.N. BOHS, B.J. GEIMAN, M.E. ANDERSON, S.C. GEBHART, G.E. TRAHEY
Speckle tracking for multi-dimensional flow estimation. Ultrasonics 38 (2000) 369-375.
- [Cach-01] C. CACHARD, O. BASSET, P. DELACHARTRE
Ultrasons, Imagerie échographique médicale. Cours Master I&S INSA Lyon (2003).
- [Chen-04] X. CHEN, M. J. ZOHDY, S. Y. EMELIANOV, M. O'DONNELL
Lateral speckle tracking using synthetic lateral phase, IEEE Transactions on UFFC (2004), Vol. 51, No. 5, 540-549
- [From-03] J. FROMAGEAU, P. DELACHARTRE
*Description of a new strain and displacement estimator for *elastography**, IEEE Ultrasonics Symposium (2003) Vol.2 5-8.
- [Giac-00] A GIACHETTI
Matching techniques to compute image motion. Image vision and computing 18 (2000) 247-260.
- [Lieb-05] H. LIEBGOTT
Contrôle de la réponse impulsionnelle d'un système d'imagerie ultrasonore par formation de voies dynamique pour l'estimation vectorielle du déplacement. Application à l'imagerie de l'élasticité des tissus biologiques. Thèse, INSA de Lyon, 2005
- [Kay-90] S. KAY, R. NEKOVEI
An efficient two-dimmmensional frequency estimator
IEEE Transactions on Acoustics,Speech and Signal Processing (1990) Vol. 38, No. 10
- [Laco-04] FRANÇOIS LACOUTURE
Méthode d'estimation 2D itérative du déplacement : approche bilinéaire
Rapport DEA Images&Systèmes (2004)
- [Lysh-05] A. LYSHCHIK, T. HIGASHI, R. ASATO, S. TANAKA, J. ITO, M. HIRAOKA, A. B. BRILL, T. SAGA, K. TOGASHI
Elastic moduli of thyroide tissues under compression
Ultrasonic Imaging 27, 101-111, 2005
- [Nitta-02] N. NITTA, T. SHIINA
A visualization of nonlinear elasticity property of tissues by ultrasound
Electronics and Communications in Japan (2002), Part 3, Vol. 85, No. 12
- [Ophi-91] J. OPHIR, I. CESPEDES, H. PONNEKANTI, Y. YAZDI, X. LI
Elastography : a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues, Ultrasonic Imaging 13 (1991) 111-134.
- [Pesa-99] A. PESAVENTO, C. PERREY, M. KRUEGER, H. ERMERT
*A time-efficient and accurate strain estimation concept for ultrasonic *elastography* using iterative phase zero estimation*, IEEE Transactions on UFFC (1999) 46(5): 1057-67.

- [Plan-03]** **G. PLANTIER, A. SOURICE, J. SAUMET**
Two-dimensional frequency estimation using autocorrelation phase fitting
IEEE ICASSP (2003), III-445 – III-448.
- [Robi-82]** **D.E. ROBINSON, F. CHEN, L.S. WILSON**
Measurement of velocity of propagation from ultrasonic pulse-echo data, 3-D flow velocity vector estimation with a triple-beam lens transducer – experimental results. Ultrasound Med. Biol. 8 (1982) 413–420.
- [Xili-03]** **XILIANG LU, E. S. EBBINI**
Phase-coupled two-dimensional speckle tracking method, IEEE Ultrasonics symposium (2003), 1931-1934
- [Yeun-98]** **FAI YEUNG, STEPHEN L LEVINSON, KEVIN J PARKER**
Multilevel and motion model-based ultrasonic speckle tracking algorithms. Ultrasound Med. and Biol. 3 (1998) 427-441.