

**Tdsi AR**  
**25/01/2019**  
**Durée : 1 heure (QCM compris)**

**NOM :** \_\_\_\_\_  
**Prénom :** \_\_\_\_\_

---

Cet énoncé est composé de 8 pages (y compris celle-ci). Merci de compléter vos nom et prénom en haut à droite de la première page et de placer vos initiales sur les pages suivantes.

Tous les documents sont autorisés.

---

On rappelle que la transformée de Radon  $\mathcal{R}$  est définie par

$$(\mathcal{R}f)(r, \theta) = \int_{\mathcal{L}_{r, \theta}} f(x, y) \, d\ell = \int_{\mathbb{R}} f(r \cos \theta - \ell \sin \theta, r \sin \theta + \ell \cos \theta) \, d\ell \quad (1)$$

et l'opérateur de rétro-projection  $\mathcal{B}$  par

$$(\mathcal{B}p)(x, y) = \int_0^\pi p(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) \, d\theta. \quad (2)$$

On rappelle également les fonctions usuelles

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{tri}(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (3)$$

ainsi que la transformée de Fourier

$$\text{sinc}(ar) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} \text{rect}\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

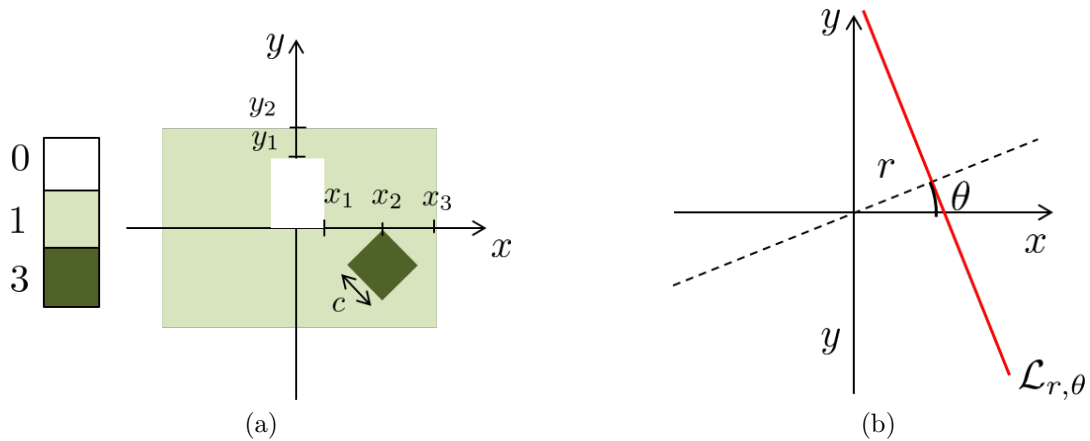
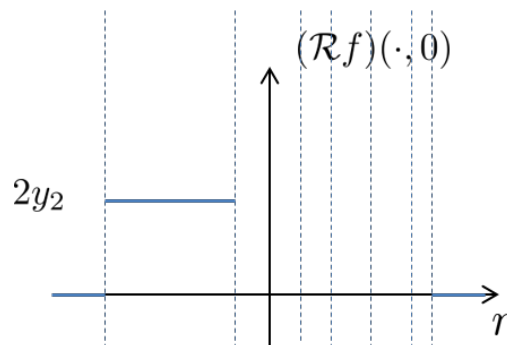


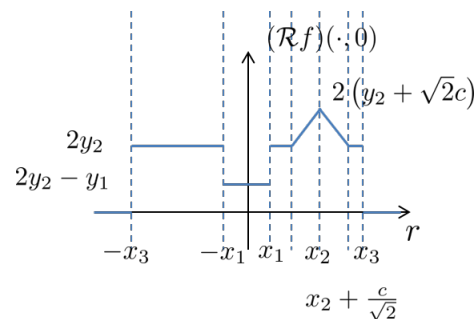
FIGURE 1 – (a) Représentation graphique de l'image  $f(x, y)$ ; (b) Systèmes de coordonnées utilisés pour la transformée de Radon.

### Questions

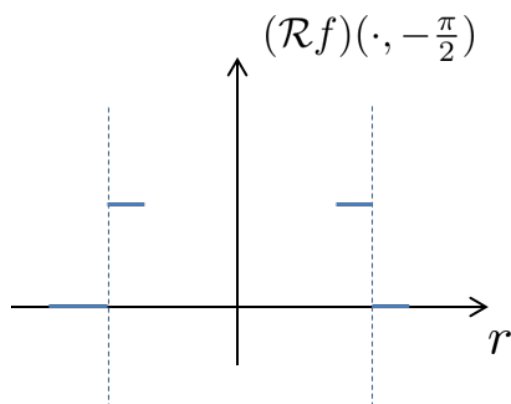
1. Compléter ci-dessous la représentation graphique de la transformée de Radon de l'image de la Figure 1. Vous préciserez *chacune* des valeurs caractéristiques du graphe de  $(\mathcal{R}f)(r, 0)$ .



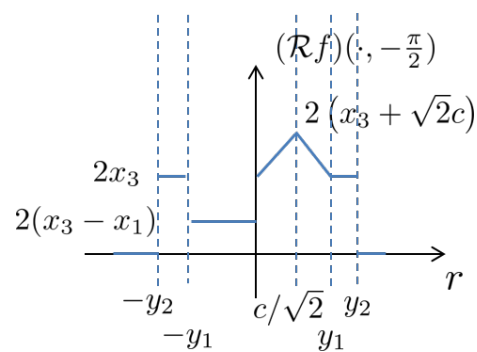
### Solution:



2. Compléter ci-dessous la représentation graphique de la transformée de Radon de l'image de la Figure 1. Vous préciserez *chacune* des valeurs caractéristiques du graphe de  $(\mathcal{R}f)(r, -\frac{\pi}{2})$ .



**Solution:**



3. En exploitant la linéarité de la transformée de Radon, exprimer  $(\mathcal{R}f)(r, 0)$  comme la somme de trois termes faisant intervenir les fonctions usuelles  $\text{rect}(\cdot)$  et  $\text{tri}(\cdot)$ .

**Solution:**

$$p(r, 0) = 2y_2 \text{rect}\left(\frac{r}{2x_3}\right) - y_1 \text{rect}\left(\frac{r}{2x_1}\right) + 2\sqrt{2}c \text{tri}\left(\frac{\sqrt{2}}{c}(r - x_2)\right)$$

4. En exploitant la linéarité de la transformée de Radon, exprimer  $(\mathcal{R}f)(r, -\frac{\pi}{2})$  comme la somme de trois termes faisant intervenir les fonctions usuelles  $\text{rect}(\cdot)$  et  $\text{tri}(\cdot)$ .

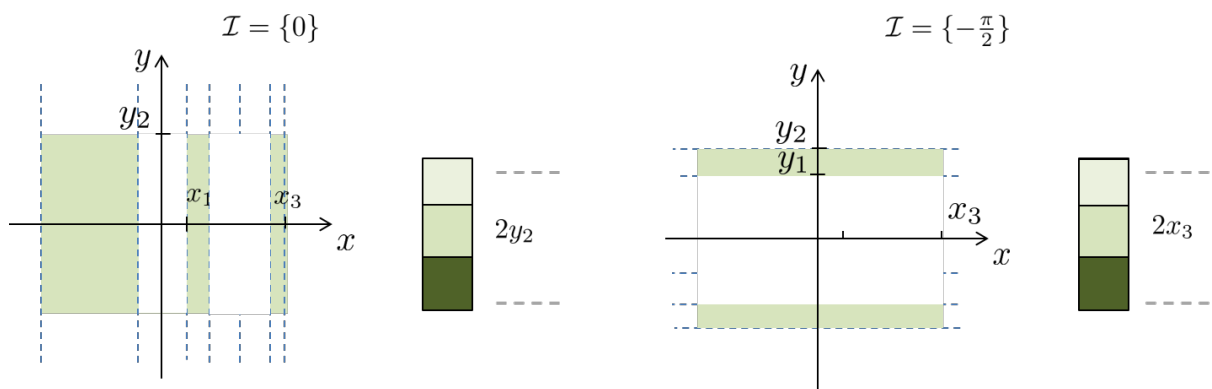
**Solution:**

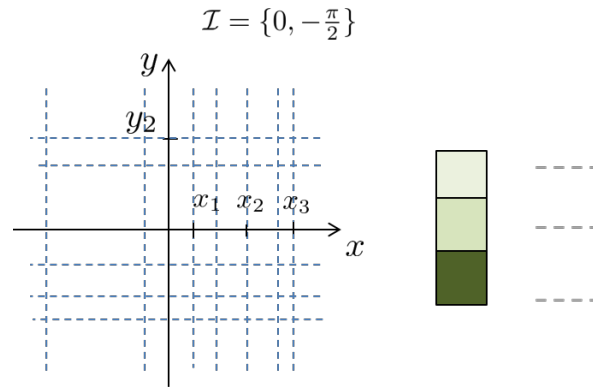
$$p(r, -\frac{\pi}{2}) = 2x_3 \text{rect}\left(\frac{r}{2y_2}\right) - 2x_1 \text{rect}\left(\frac{r}{y_1} + \frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{2}c \text{tri}\left(\frac{\sqrt{2}}{c}r - 1\right)$$

5. Ayant mesuré  $p = \mathcal{R}f$  expérimentalement, on cherche à estimer l'image  $f$  par rétro-projection. En pratique, on dispose d'un nombre fini d'angles de projection  $\theta \in \mathcal{I} = \{\theta_1, \dots, \theta_I\}$ . On discrétise alors (2) en calculant

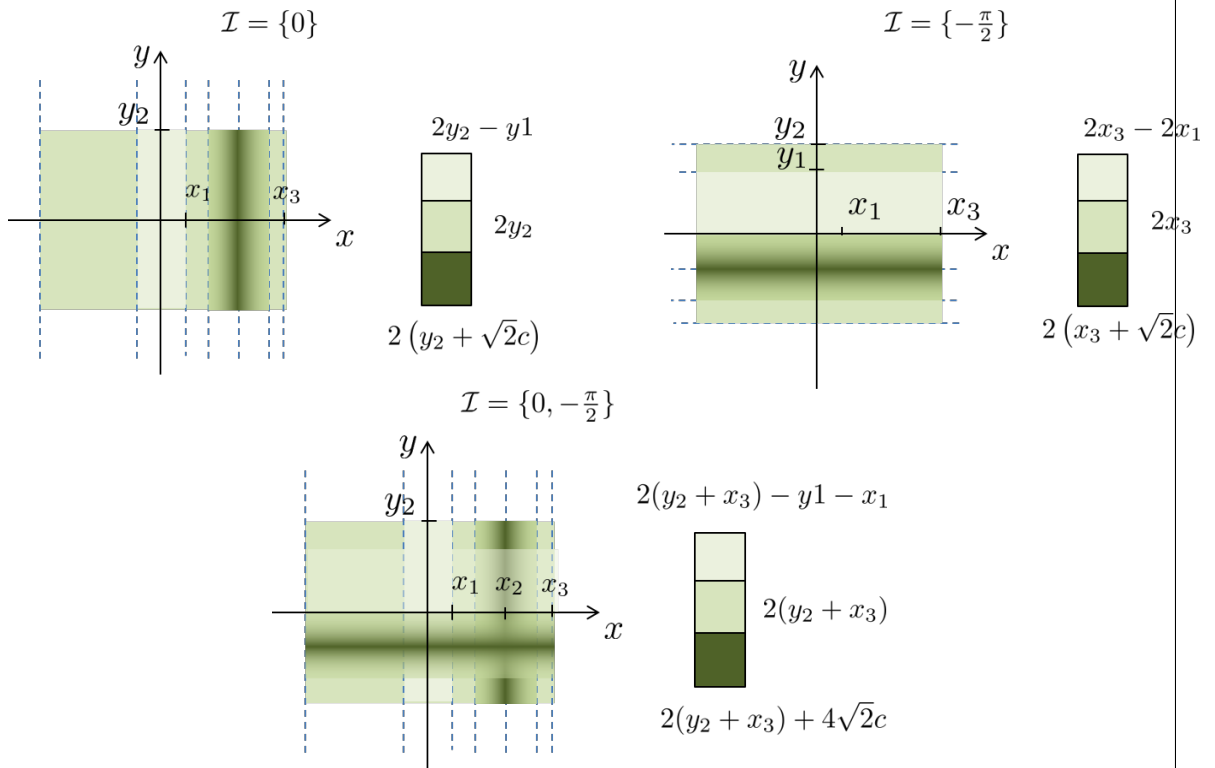
$$(\mathcal{B}p)(x, y) \approx \sum_{\theta_i \in \mathcal{I}} p(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i, \theta_i) \quad (5)$$

Compléter les représentations graphiques des rétroprojetés ci-dessous. Prenez soin de bien compléter les pointillés au niveau des échelles de couleurs.





**Solution:**



6. Pour reconstruire  $f$  de façon *parfaite*, il faut procéder par *rétroprojection filtrée* :

$$f = \mathcal{B}p^{\text{filt}}, \quad \text{avec} \quad \hat{p}^{\text{filt}}(\xi, \theta) = |\xi| \hat{p}(\xi, \theta), \quad \forall \theta \quad (6)$$

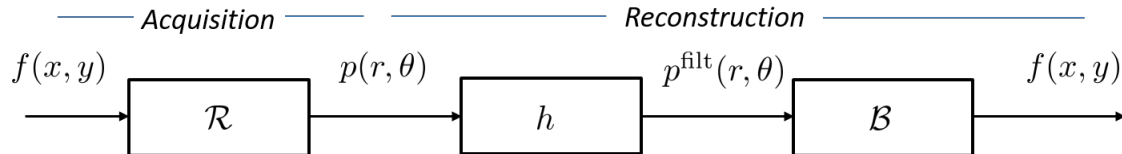
où  $\hat{p}(\cdot, \theta)$  désigne la transformée de Fourier (1D) de  $p(\cdot, \theta)$ .

En pratique, pourquoi choisit-on un filtre de la forme suivante ?

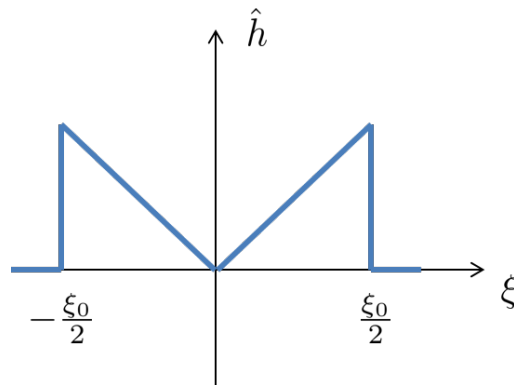
$$\hat{p}^{\text{filt}}(\xi, \theta) = |\xi| A(\xi) \hat{p}(\xi, \theta) \quad (7)$$

**Solution:** Afin de limiter l'amplification du bruit qui devient dominant à haute fréquence. Par ailleurs, l'acquisition est intrinsèquement limitée à une certaine bande fréquentielle  $[-f_{\max}, f_{\max}]$ .

7. On se propose d'implémenter la rétroprojection filtrée de la formule (6) au moyen de la chaîne de traitement ci-dessous, où  $\hat{h}(\xi) = |\xi|A(\xi)$



On choisit le filtre de Ram-Lak  $\hat{h}(\xi) = |\xi|A(\xi)$  représenté ci-dessous.



- a Que représente  $\xi_0$  ? Comment choisir sa valeur ?

**Solution:** La fréquence de coupure qui fait l'objet d'un compromis. Une faible valeur limite l'amplification du bruit mais détériore la résolution spatiale de la reconstruction. Au plus, elle doit être choisie comme la demi fréquence max d'échantillonnage liée à la taille des pixels du détecteur.

- b Donner une expression analytique de  $\hat{h}(\xi)$  au moyen des *seules* fonctions usuelles  $\text{rect}(\cdot)$  et  $\text{tri}(\cdot)$ .

**Solution:**

$$\hat{h}(\xi) = \frac{\xi_0}{2} \left[ \text{rect}\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) - \text{tri}\left(\frac{2\xi}{\xi_0}\right) \right]$$

c En déduire la réponse impulsionnelle  $h(r)$  du filtre

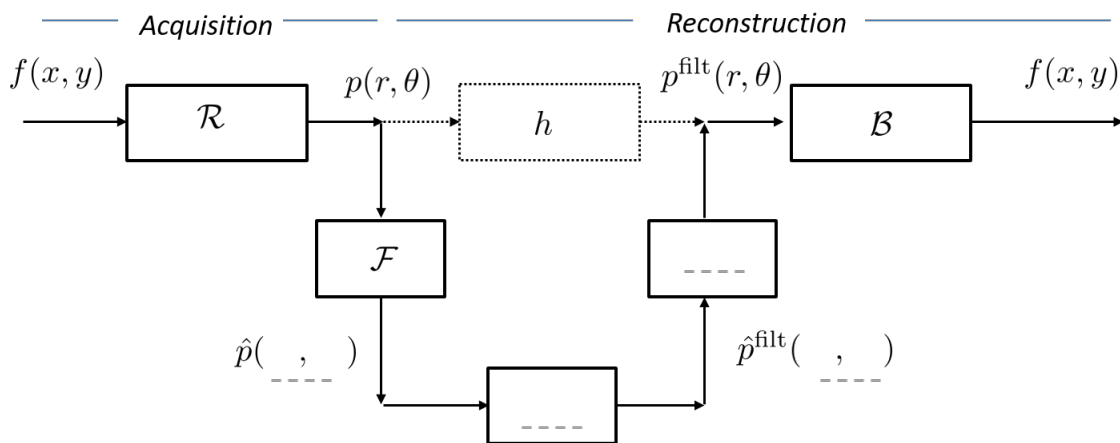
**Solution:**

$$h(r) = \frac{\xi_0}{2} \left[ \xi_0 \operatorname{sinc}(\xi_0 r) - \frac{\xi_0}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\xi_0 r}{2}\right) \right]$$

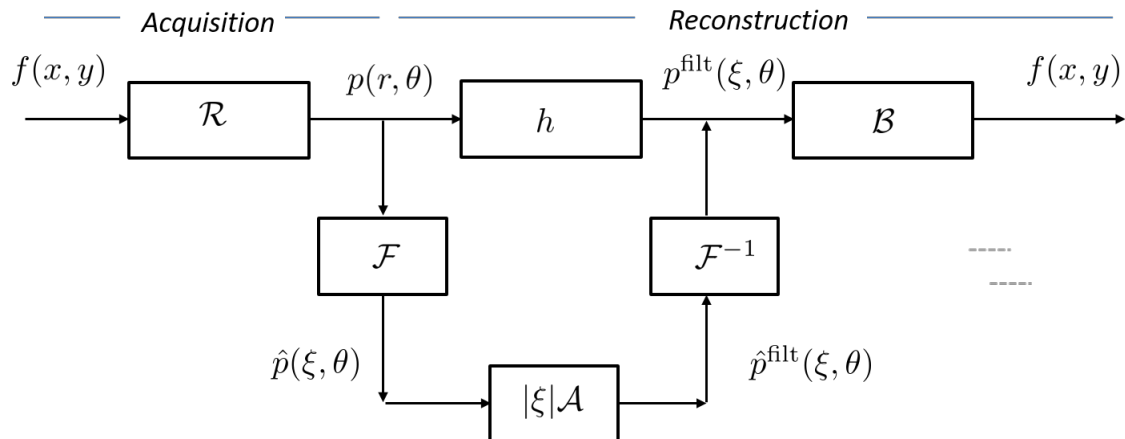
d Quel problème pratique pose la forme de  $h(r)$  ?

**Solution:** Réponse impulsionnelle infinie donc nécessité de tronquer et/ou calculs longs pour l'opération de filtrage

8. Pour pallier le problème mis en évidence, on propose l'implémentation alternative schématisée ci-dessous.



a Compléter le schéma au niveau des traits pointillés.



b Préciser l'intérêt de cette alternative.

**Solution:** Le filtrage dans Fourier est ici très peu coûteux ici. Par ailleurs, la FFT est rapide. En pratique, cette approche s'avère plus avantageuse au point de vue du temps de calcul.



Nom et prénom : .....
-----------------------

*Durée indicative : 20 minutes.*

*Les documents sont autorisés ainsi que la calculatrice. Les questions faisant apparaître le symbol ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. Des points négatifs seront affectés aux très mauvaises réponses.*

**Question 1 ♣** Pourquoi utilise-t-on du gel à appliquer sur la sonde ou le transducteur afin de réaliser une acquisition ultrasonore ?

- ☐ Pour augmenter la puissance transmise
- ☐ pour supprimer l'air entre la sonde et la peau
- ☐ Pour faire une adaptation d'impédance
- ☐ Pour éviter les échauffements
- ☐ Pour permettre à la sonde de glisser sur la peau
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 2** Combien de temps mettra une onde ultrasonore pour parcourir une distance de 33 cm dans l'air ?

- ☐ 1 ns
- ☐ 1 s
- ☐ 100  $\mu$ s
- ☐ 1 ms

**Question 3 ♣** Soit deux diffuseurs situés respectivement à 6 et 9 cm d'une sonde ultrasonore. Quel est le rapport d'amplitude (sur une échelle linéaire) entre les signaux mesurés en provenance des deux diffuseurs B et C ? On supposera une atténuation de 5 dB/cm/MHz et une sonde ayant une fréquence centrale de 2 MHz.

- ☐ 10
- ☐ 30
- ☐ 100
- ☐ 1 000
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 4 ♣** Quels sont les avantages de l'imagerie US par rapport à l'imagerie X ?

- ☐ Meilleure résolution spatiale
- ☐ Transportable
- ☐ Meilleure cadence d'acquisition
- ☐ Moins ionisant
- ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 5** Quel algorithme est classiquement utilisé pour la reconstruction d'image sur les scanners cliniques ?

- ☐ Rétroprojection filtrée
- ☐ Filtre de Kalman
- ☐ Transformée de Radon
- ☐ Delay and Sum

## CORRECTION

☐ Transformée de Fourier

**Question 6 ♣** Comment se comporte l'onde ultrasonore en présence d'une interface eau/foie ?  
Rappel :  $Z_{\text{eau}} = 1.48 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$ ,  $Z_{\text{foie}} = 1.65 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s})$ .

☐ La moitié de l'énergie de l'onde est transmise, l'autre moitié réfléchi.

☐ L'onde est majoritairement réfléchi au niveau de l'interface

☐ L'onde est majoritairement transmise au foie

☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 7** Une sonde ultrasonore est utilisée pour imager un diffuseur situé à 1.5 cm de profondeur dans l'eau. En supposant que la sonde émet un pulse de longueur  $2 \mu\text{s}$ , quelle est la durée minimum d'acquisition parmi celles ci-dessous ?

☐  $22 \mu\text{s}$

☐  $11 \mu\text{s}$

☐  $101 \mu\text{s}$

☐  $202 \mu\text{s}$