

Tdsi AR
21/01/2020
Durée : 1 heure (QCM compris)

NOM : _____
Prénom : _____

Cet énoncé est composé de 5 pages (y compris celle-ci). Merci de compléter vos nom et prénom en haut à droite de la première page et de placer vos initiales sur les pages suivantes.

Tous les documents sont autorisés.

Exercice (14 points)

On rappelle que la transformée de Radon \mathcal{R} d'une image f est définie par

$$(\mathcal{R}f)(r, \theta) = \int_{\mathcal{L}_{r,\theta}} f(x, y) \, d\ell = \int_{\mathbb{R}} f(r \cos \theta - \ell \sin \theta, r \sin \theta + \ell \cos \theta) \, d\ell \quad (1)$$

Après discréétisation du problème d'acquisition en tomographie par rayons X, on aboutit à une équation de la forme

$$\mathbf{y} = \mathbf{Rx} \quad (2)$$

où $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ représente le vecteur contenant les mesures, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ est une version discrète de la transformée de Radon et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ est une version discrète de l'image que l'on souhaite reconstruire.

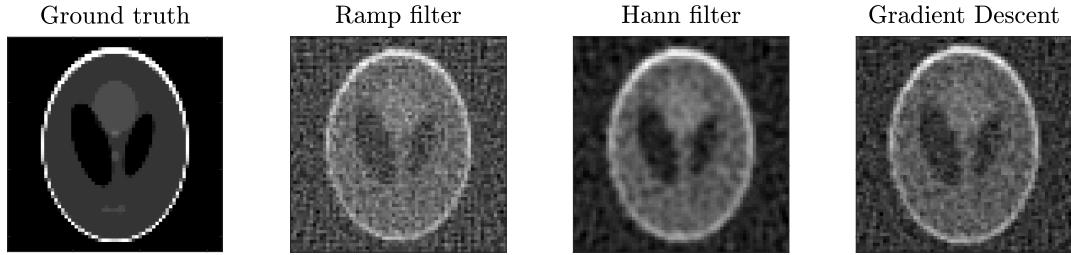


FIGURE 1 – Image test (« Ground truth ») et reconstructions obtenues, **en présence de bruit**, par des méthodes analytiques (« Ramp filter », « Hann filter ») et une méthode algébrique (« Gradient descent »). Ici, $N_\rho = 95$, $N_\theta = 30$, $N_x = 64$ et $N_y = 64$.

Questions

1. On propose de reconstruire l'image \mathbf{x} en minimisant la fonctionnelle ci-dessous

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{Rx}\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{Lx}\|_2^2 \quad (3)$$

où $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ est un opérateur choisi de façon à introduire une information a priori concernant la solution et α est le paramètre de régularisation.

- (a) A quoi correspond le cas $\alpha = 0$?

Solution: $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{Rx}\|_2^2$. Il s'agit de la solution non régularisée classique vue en cours qui correspond à l'image « Gradient descent » de la figure 1.

- (b) A quoi correspond le cas $\alpha \rightarrow \infty$?

Solution: $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Lx}\|_2^2$. La solution ne dépend plus des mesures mais seulement de l'information a priori (on recherche \mathbf{x} tel que $\|\mathbf{Lx}\|_2^2$ soit petit).

- (c) A partir des deux cas limites précédents, conclure quant au choix de α ?

Solution: Choix fondamental issu d'un compromis entre valeurs mesurées et information a priori concernant la solution.

2. On considère un détecteur avec N_ρ pixels et N_θ angles de vue. Donner l'expression de M défini par l'Eq. (2) en fonction de ces variables

Solution:

$$M = N_\rho N_\theta$$

3. Soit $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y}$ l'image que l'on souhaite reconstruire, telle que représentée à la figure 1.
- (a) Donner l'expression de N défini par l'Eq. (2) en fonction de N_x et N_y .

Solution:

$$N = N_x N_y$$

- (b) Donner la relation entre \mathbf{X} et la variable \mathbf{x} définie par l'Eq. (2). Donner l'expression de \mathbf{x} en fonction des $(X)_{ij}$, $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq I$ pour $I = 3$.

Solution:

$$\mathbf{x} = [X_{11}, X_{21}, X_{31}, X_{12}, X_{22}, X_{32}, X_{13}, X_{23}, X_{33}]^\top$$

4. On décide de choisir $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ comme étant un opérateur différentiel.

- (a) On définit le laplacien d'une image par $(\Delta \mathbf{x})_{i,j} = 4X_{i,j} - X_{i-1,j} - X_{i+1,j} - X_{i,j-1} - X_{i,j+1}$ et supposera l'image nulle en dehors de sa zone de définition. Donner l'expression du laplacien $\mathbf{L} = \Delta$ pour une image de taille 3×3 (tous les coefficients de la matrice sont attendus).

Solution:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- (b) Pourquoi choisir ce type de matrice ? Quelle information a priori souhaite-t-on fournir concernant la solution souhaitée ?

Solution: On cherche une image pour laquelle les variations spatiales sont faibles, c'est-à-dire une image « lisse ». On cherche à lutter contre l'effet nuisible du bruit.

5. On propose de reconstruire l'image en minimisant la fonctionnelle de l'Eq. (3) par un algorithme de descente de gradient.

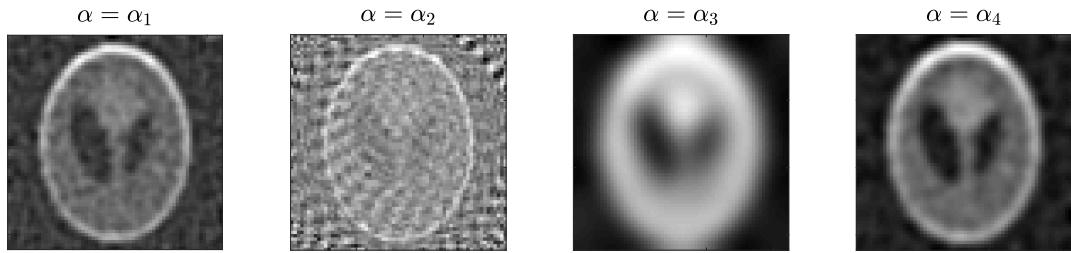


FIGURE 2 – Minimiseur de la fonctionnelle définie par l'Eq. (3) pour quatre valeurs du paramètre de régularisation α .

- (a) Donner l'expression du gradient de \mathcal{C} en fonction de \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{R} , \mathbf{L} et α .

Solution: $\nabla \mathcal{C}(\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^\top(\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{x}) + \alpha \mathbf{L}^\top \mathbf{L}\mathbf{x}$.

- (b) Donner l'équation de la mise à jour de \mathbf{x} en fonction de \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{R} , \mathbf{L} et α .

Solution: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \tau [\mathbf{R}^\top(\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{x}) - \alpha \mathbf{L}^\top \mathbf{L}\mathbf{x}]$, où τ est un pas de descente classiquement choisi entre 0 et 1.

6. On propose maintenant de calculer explicitement l'image \mathbf{x}^* qui minimise la fonctionnelle de Eq. (3).

- (a) Une condition nécessaire est l'annulation du gradient de \mathcal{C} . Donner l'expression de \mathbf{x}^* qui en découle, en fonction de \mathbf{y} , \mathbf{R} , \mathbf{L} et α .

Solution: $\mathbf{x}^* = (\mathbf{R}^\top \mathbf{R} + \alpha \mathbf{L}^\top \mathbf{L})^{-1} \mathbf{R}^\top \mathbf{y}$.

- (b) Quelle sont les avantages et inconvénients de la solution ainsi obtenue par rapport à la mise en oeuvre de l'approche itérative par descente de gradient de la question 5.

Solution: L'inconvénient principal réside dans le calcul de l'inverse. Numériquement, il existe des schémas d'inversion de systèmes linéaires efficaces, notamment dans le cas de matrices symétriques définies positives.

Le principale avantage consiste à se passer du schéma d'optimisation itératif et des problèmes liés à sa convergence. La solution obtenue dépend fortement des hyperparamètres choisis (nombre d'itération, longueur de pas) et de la localisation des minima locaux.

7. L'image \mathbf{x}^* a été calculé pour quatre valeurs de α prises dans l'ensemble $\{10^{-1}, 10, 10^3, 10^5\}$. Les résultats sont représentés à la figure 2.

- (a) Associez une valeur numérique à chacun des α_i , $1 \leq i \leq 4$, de la figure 2 en justifiant votre choix.

Solution: $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 10^{-2}$, $\alpha_3 = 10^5$ et $\alpha_4 = 10^3$. Plus α est grand, plus l'image est lisse.

- (b) A quelle image de la figure 1 devrait correspondre l'image de la figure 2 associée au plus petit paramètre de régularisation ? Comment expliquer que ce n'est pas le cas ?

Solution: L'image obtenue pour $\alpha = 10^{-2}$ devrait correspondre à la solution non régularisée obtenue par « gradient descent ». Ce n'est pas le cas, car l'algorithme itératif est stoppé avant convergence, ce qui a un effet « régulariseur ».

Tdsi AR
21/01/2020
Durée : 1 heure (QCM compris)

NOM : _____
Prénom : _____

Cet énoncé est composé de 2 pages (y compris celle-ci). Merci de compléter vos nom et prénom en haut à droite de la première page et de placer vos initiales sur les pages suivantes.

Tous les documents sont autorisés.

QCM (6 points)

N.B. : Aucune, une ou plusieurs bonnes réponses sont possibles.

1. Quelle est la gamme de fréquence utilisée en ultrasons médicaux chez l'homme ?
 - 2-10 Hz
 - 2-10 kHz
 - 2-10 MHz
 - 2-10 GHz

2. Les ondes ultrasonores de compression
 - impliquent un mouvement local des particules qui est colinéaire à la direction de propagation de l'onde
 - n'impliquent aucun mouvement local de particules
 - impliquent un mouvement local des particules qui est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde

3. Pour une sonde ultrasonore linéaire –dont les éléments piézo-électriques sont placés les uns à côté des autres le long d'une droite– la création d'un point focal en émission peut être obtenue en mettant les éléments piézo-électriques sous tension :
 - de façon simultanée
 - de façon séquentielle, les uns après les autres, le long de la ligne
 - en commençant par ceux à l'extérieur pour terminer par ceux au centre
 - en commençant par ceux au centre pour terminer par ceux à l'extérieur
 - de façon aléatoire

4. Une sonde ultrasonore envoie un faisceau (durée du signal = $10 \mu\text{s}$) pour imager un diffuseur situé à 3 cm de profondeur dans les tissus mous. Quelle est la durée **minimum** de l'acquisition pour imager le diffuseur en échographie classique ?
- 31 μs
 - 41 μs
 - 51 μs
 - 61 μs
5. La focalisation dynamique
- implique de balayer le faisceau exciteur du centre vers l'extérieur
 - est utilisée durant la phase de réception
 - est utilisée durant la phase d'émission
 - implique d'ajuster continuellement le délai des éléments piézo-électriques
6. En supposant que la vitesse de propagation des ondes ultrasonores soit paramétrée à 1540 m/s sur un échographe, que se passe-t-il si la vitesse réelle dans les tissus est inférieure à cette valeur ?
- La profondeur des structures échogènes sera surestimée
 - La profondeur des structures échogènes sera sous-estimée.
 - La résolution spatiale sera accrue.
 - La résolution spatiale sera réduite.
7. Comment augmenter l'énergie moyenne du spectre émis par un tube à rayons X ?
- En augmentant la tension entre l'anode et la cathode.
 - En augmentant le courant.
 - En refroidissant le tube.
 - En plaçant un filtre en molybdène entre l'objet et le détecteur.
 - En plaçant un filtre en molybdène entre le tube et l'objet.
 - Il n'y a rien à faire, sauf à changer de tube.
8. On dispose d'un algorithme de reconstruction par rétroprojection filtrée. Comment réduire le temps de reconstruction ?
- En diminuant le nombre d'angles de vue acquis.
 - En augmentant le nombre d'angles de vue acquis.
 - En diminuant le nombre de pixels du détecteur.
 - En augmentant le nombre de pixels du détecteur.
 - En utilisant un algorithme algébrique (ART, SART, etc).