

Tdsi AR
22/01/2021
Durée : 1 heure (QCM compris)

NOM : _____
Prénom : _____

Cet énoncé est composé de 9 pages (y compris celle-ci). Merci de compléter vos nom et prénom en haut à droite de la première page et de placer vos initiales sur les pages suivantes.

Tous les documents sont autorisés.

Exercice (14 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier différentes approches numériques classiques en reconstruction CT. On rappelle que la transformée de Radon \mathcal{R} d'une image f est définie par

$$s(r, \theta) = (\mathcal{R}f)(r, \theta) = \int_{\mathcal{L}(r, \theta)} f(x, y) \, d\ell \quad (1)$$

où $\mathcal{L}(r, \theta)$ décrit la trajectoire des rayons X qui intersectent le pixel du détecteur à la coordonnée radiale r et à l'angle de vue θ . On appelle communément sinogramme l'ensemble des mesures $s(r, \theta)$ acquises.

Après discréttisation du problème, on aboutit à l'équation matrice-vecteur suivante

$$\mathbf{s} = \mathbf{R}\mathbf{f} \quad (2)$$

où $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ représente le vecteur contenant les mesures, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ est une version discrète de la transformée de Radon et $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ est une version discrète de l'image de l'objet que l'on souhaite reconstruire.

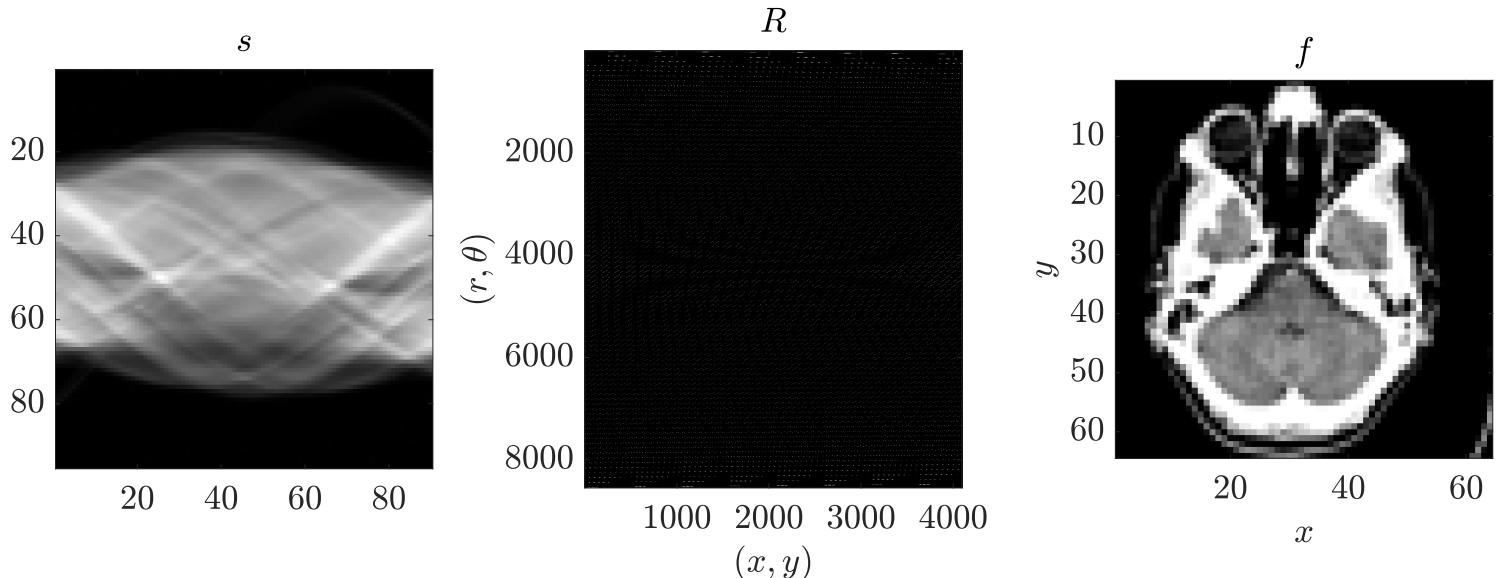


FIGURE 1 – Sinogramme $s(r, \theta)$, opérateur de radon discret \mathbf{R} et objet test $f(x, y)$.

Questions

1. Compréhension du problème direct

- (a) Compléter la figure 1 en y ajoutant le nom des variables correspondant aux 2 axes du sinogramme.

Solution: Axe vertical : r , axe horizontal : θ

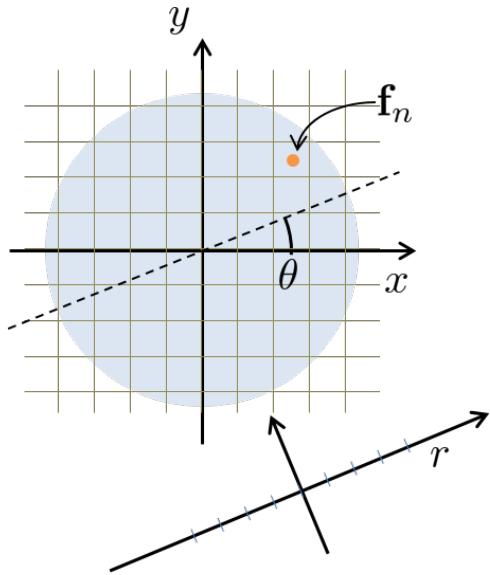
- (b) Le détecteur est constitué de $n_r = 95$ pixels et on considère $n_\theta = 90$ angles de vue. Préciser les dimensions des vecteurs mesures et images définis par l'Eq. (2).

Solution:

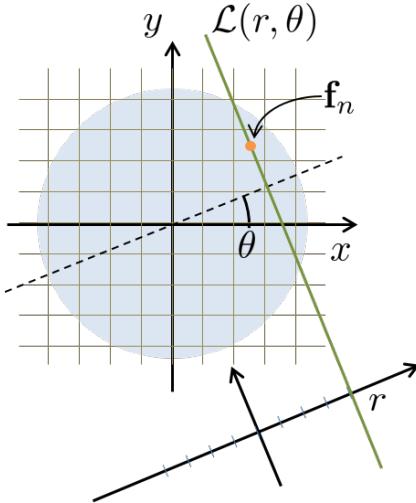
$$M = n_r n_\theta = 95 \times 90 = 8550$$

$$N = n_x n_y = 64 \times 64 = 4096$$

2. (a) Comme on peut l'observer sur la figure 1, la matrice \mathbf{R} est creuse –elle contient peu de valeurs non nulles. Expliquer cela par une interprétation géométrique que vous illustrerez en complétant la figure ci-dessous. En particulier, vous pourrez raisonner à angle de vue et pixel du détecteur fixés.



Solution: Fixer un angle de vue et un pixel du détecteur revient à étudier une ligne de la matrice \mathbf{R} . Seuls les pixels de l'image qui intersectent le rayon correspondant à un pixel détecteur et un angle de vue (r, θ) sont non nulles.



- (b) Soit \mathbf{s}_n le vecteur mesure obtenu pour une image \mathbf{f} dont seul le n^{ieme} pixel est non nul. Relier \mathbf{s}_n à \mathbf{R} .

Solution: $\mathbf{s}_n = \mathbf{R}[0 \dots \alpha \dots 0]^\top = \alpha \mathbf{r}_n$, où $\mathbf{r}_n \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ est la n^{ieme} colonne de \mathbf{R} .

- (c) Afin de construire la matrice \mathbf{R} , on se propose d'utiliser la fonction `radon` (cf. header en annexe) qui implémente la transformation donnée par Eq. (1). Compléter les lignes 16 et 18 du code ci-dessous

```
1 % Forward discrete Radon operator
```

```

2  %
3  % Np: [1 x 1]           number of pixels across x and y
4  % theta: [Ntheta x 1]    projection angles
5  function R = radon_discrete(Np, theta)
6
7  % Init output
8  Z = zeros(Np,Np);
9  R0 = radon(Z, 0); % To get the number of pixel along radial direction
10 Nr = length(R0);
11 R = sparse(length(theta)*Nr,Np*Np);
12
13 % Main
14 for pp = 1:Np*Np
15     M = Z;
16
17     R0 = radon(M, theta);
18
19 end

```

Solution:

$$\begin{aligned} M(pp) &= 1; \\ R(:, pp) &= R0(:,); \end{aligned}$$

- (d) On note c_m le nombre de coefficients non nuls sur la m^e ligne de \mathbf{R} . A partir de l'interprétation graphique de la question 2(a), proposer une borne inférieure et une borne supérieure pour c_m , en supposant un pixel détecteur infiniment fin.

Solution: Fixer un angle de vue et un pixel du détecteur revient à étudier une ligne de la matrice \mathbf{R} . Pour un pixel détecteur infiniment fin, on aurait $0 \leq c_m \leq 2N_x$. La borne inférieure est obtenue pour les rayons qui n'intersectent pas l'objet (cf. vues à 0 ou $\pi/2$ rad). La borne supérieure est obtenue pour les pixels centraux au angles de vue obliques (cf. vues à $\pi/4$ ou $3\pi/4$ rad))

3. Comme illustré à la figure 2(b), une reconstruction grossière peut être obtenue simplement en calculant $\mathbf{R}^\top \mathbf{s}$. Donner une interprétation physique à cette opération en vous concentrant sur la valeur reconstruite en un pixel donné \mathbf{f}_n . Inspirez-vous de votre réponse à la question 2(b) et complétez le schéma ci-dessous. A quelle opération vu en cours correspond-elle ?

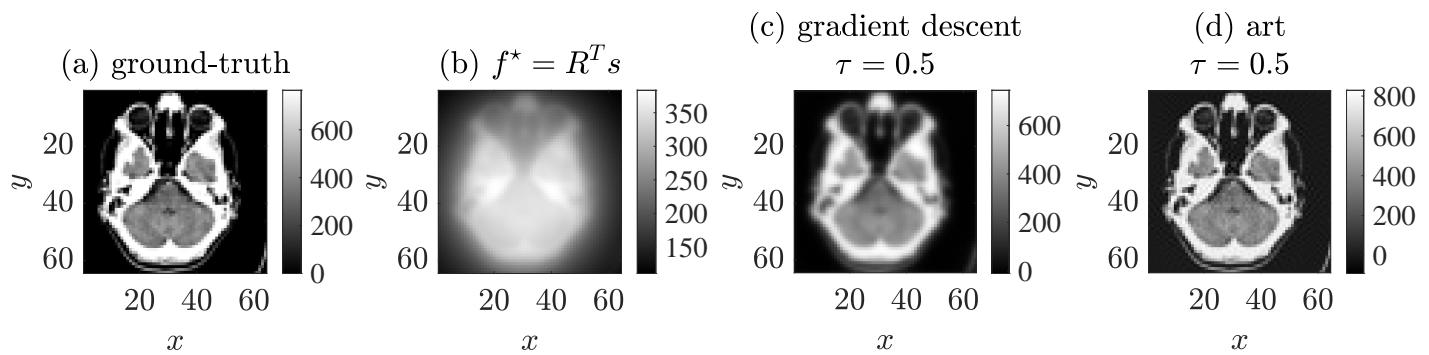
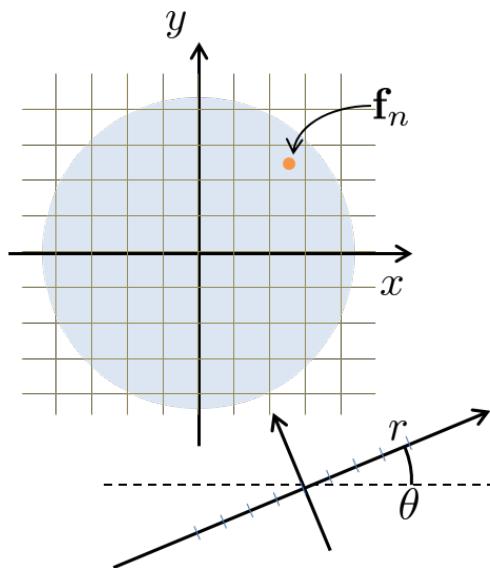
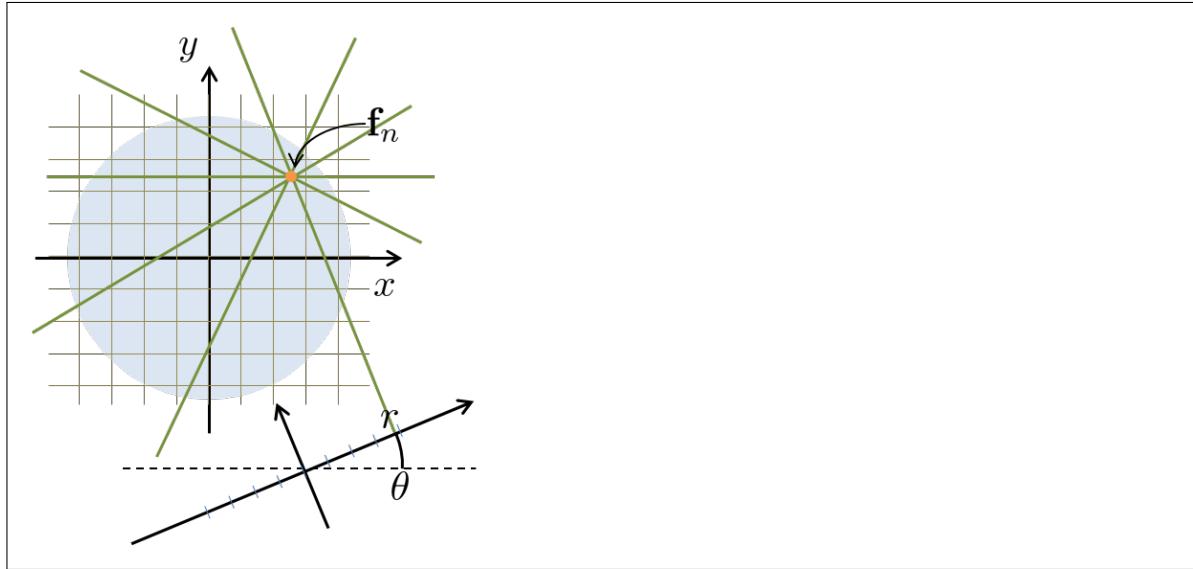


FIGURE 2 – Reconstruction d'une image par différentes approches



Solution: $\mathbf{f}_n^* = \mathbf{r}_n^\top \mathbf{s}$ où $\mathbf{r}_n \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ est la n^e colonne de \mathbf{R} . Par conséquent, on somme toutes les mesures ayant intersecté ce pixel de l'image. Il s'agit de l'opération de rétro-projection !



4. On souhaite mettre en place une descente de gradient dont l'équation de mise à jour est la suivante

$$\mathbf{f}^{(h)} = \mathbf{f}^{(h-1)} - \tau \Delta \mathbf{f}^{(h)}, \quad \mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{0} \quad (3)$$

où τ est le pas de descente et $\Delta \mathbf{f}^{(h)}$ est le terme de correction.

- (a) Donner la dimension du pas de descente et du terme de correction.

Solution: Le pas de descente τ est un scalaire. On a $\Delta \mathbf{f}^{(n)} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$

- (b) Donner l'expression du terme de correction $\Delta \mathbf{f}^{(h)}$ qui minimise la fonction de coût $\mathcal{C}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{s} - \mathbf{R}\mathbf{f}\|^2$,

Solution: On a $\Delta \mathbf{f}^{(n)} = \nabla \mathcal{C} = -2\mathbf{R}^\top(\mathbf{s} - \mathbf{R}\mathbf{f})$

- (c) On cherche à implémenter cet algorithme de façon à générer la figure 2(c). Compléter les lignes 18 et 19 du code Matlab ci-dessous

```

1  % A: [M x N] system matrix
2  % y: [M x 1] measured data
3  % gamma: [1 x 1] step length.
4  % I: [1 x 1] iteration number
5  % x: [N x 1] reconstructed image
6  function x = gradient_descent(A,y,gamma,I)
7
8  % Init
9  x = zeros(size(A,2),1);
10
11 % remove irrelevant (rho, theta) rays
12 am2 = sum(A,2);
13 y = y(am2~=0);
14 A = A(am2~=0,:);
```

```

15
16 % Gradient descent
17 for i = 1:I
18     g =
19     x =
20 end

```

Solution:

$$\begin{aligned} g &= 2 * A' * (A * x - y); \\ x &= x - \text{gamma} * g; \end{aligned}$$

5. On rappelle que l'algorithme ART est un algorithme itératif défini par l'équation de mise à jour suivante

$$\mathbf{f}^{(h)} = \mathbf{f}^{(h-1)} - \frac{\mathbf{r}_h^\top \mathbf{f}^{(h-1)} - s_h}{\mathbf{r}_h^\top \mathbf{r}_h} \mathbf{r}_h, \quad \mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{0} \quad (4)$$

- (a) Préciser les dimension de \mathbf{r}_h^\top , s_h , \mathbf{r}_h et $\mathbf{r}_h^\top \mathbf{r}_h$

Solution: $\mathbf{r}_h^\top \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ (vecteur ligne)
 $s_h \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ (scalaire)
 $\mathbf{r}_h \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ (vecteur colonne)
 $\mathbf{r}_h^\top \mathbf{r}_h \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ (scalaire)

- (b) Définir \mathbf{r}_h^\top et s_h en fonction de \mathbf{R} et \mathbf{s} , respectivement, et préciser leur dimension

Solution: $\mathbf{r}_h^\top \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ est la h^e ligne de la matrice \mathbf{R} et s_h la h^e composante du vecteur \mathbf{s}

- (c) Démontrer que l'algorithme ART est tel que la h^e équation du système linéaire $\mathbf{s} = \mathbf{R}\mathbf{f}$ est vérifiée après h mises à jour

Solution: On cherche à montrer que $\mathbf{r}_h^\top \mathbf{f}^{(h)} = s_h$

$$\mathbf{r}_h^\top \mathbf{f}^{(h)} = \mathbf{r}_h^\top \left(\mathbf{f}^{(h-1)} - \frac{\mathbf{r}_h^\top \mathbf{f}^{(h-1)} - s_h}{\mathbf{r}_h^\top \mathbf{r}_h} \mathbf{r}_h \right) \quad (5)$$

en remarquant que $\mathbf{r}_h^\top \mathbf{f}^{(h-1)} - s_h$ est un scalaire, on a bien

$$= \mathbf{r}_h^\top \mathbf{f}^{(h-1)} - (\mathbf{r}_h^\top \mathbf{f}^{(h-1)} - s_h) \frac{\mathbf{r}_h^\top \mathbf{r}_h}{\mathbf{r}_h^\top \mathbf{r}_h} \quad (6)$$

$$= s_h \quad (7)$$

- (d) Combien de pixels de l'image sont modifiés à chaque mise à jour ?

Solution: Tous !

- (e) On cherche à implémenter cet algorithme de façon à obtenir la figure 2(d). Compléter les lignes 23 et 24 du code Matlab ci-dessous

```

1  % ART algorithm
2 %
3 % A: [M x N] Radon matrix
4 % y: [M x 1] measured data
5 % I: [1 x 1] iteration number
6 % x: [N x 1] reconstructed image
7
8 function x = art(A,y,I)
9
10 % Init
11 x = zeros(size(A,2),1);
12
13 % remove irrelevant (rho, theta) rays
14 a = sum(A,2);
15 y = y(a~=0);
16 A = A(a~=0,:);
17
18 % ART algorithm
19 % Iteration loop
20 for ii=1:I
21     % loop over all rows of A
22     for mm=1:size(A,1)
23
24
25     end
26 end

```

Solution:

```

a_m = A(mm,:) ;
x = x - (a_m*x - y(mm))*a_m'/(a_m*a_m') ;

```

- (f) Expliquer en quoi les lignes 15 et 16 de la fonction `art` sont utiles, voire indispensables ? Interpréter physiquement

Solution: On souhaite éviter les divisions par zéros, qui interviennent si et seulement s'il existe h tel que $\mathbf{r}_h^\top \mathbf{r}_h = 0$ soit si $\mathbf{r}_h = \mathbf{0}$. Physiquement, cela revient à retirer des mesures (et du modèle direct correspondant) les lignes de projection qui n'intersectent pas l'objet.

Annexes

0.1 Header of the radon function

The `radon` function computes the Radon transform, which is the projection of the image intensity along a radial line oriented at a specific angle.
`R = radon(I,THETA)` returns the Radon transform of the intensity image `I` for the angle `THETA` degrees. If `THETA` is a scalar, the result `R` is a column vector containing the Radon transform for `THETA` degrees. If `THETA` is a vector, then `R` is a matrix in which each column is the Radon transform for one of the angles in `THETA`. If you omit `THETA`, it defaults to `0:179`.

Tdsi AR
22/01/2021
Durée : 1 heure (QCM compris)

NOM : _____
Prénom : _____

Cet énoncé est composé de 2 pages (y compris celle-ci). Merci de compléter vos nom et prénom en haut à droite de la première page et de placer vos initiales sur les pages suivantes.

Tous les documents sont autorisés.

QCM (6 points)

N.B. : **Une seule** bonne réponse est possible.

1. Quelle est la gamme de fréquence classiquement utilisée en ultrasons médicaux chez l'homme ?
 - 1-5 Hz
 - 1-5 kHz
 - 1-5 MHz
 - 1-5 GHz

2. Que vaut la longueur d'onde d'une onde ultrasonore à une fréquence de 4 MHz se déplaçant dans l'eau. On rappelle que la vitesse de propagation des ultrasons dans l'eau est de 1540 m/s.
 - Environ 0.4 mm
 - Environ 4 mm
 - Environ 4 cm.
 - Environ 40 μ m

3. Une sonde ultrasonore envoie un faisceau (durée du signal = 10 μ s) pour imager un diffuseur situé à 3 cm de profondeur dans les tissus mous. Quelle est la durée **minimum** de l'acquisition pour imager le diffuseur en échographie classique?
 - 30 μ s
 - 40 μ s
 - 50 μ s
 - 60 μ s

4. Quel est le comportement d'une onde ultrasonore à l'interface entre deux milieux d'impédances acoustiques de même ordre de grandeur ? Par exemple entre l'eau ($Z_{\text{eau}} = 1.48$) et le milieu 2 correspondant à du foie ($Z_{\text{foie}} = 1.65$) ?
- L'onde est complètement réfléchie au niveau de l'interface
 - Environ une moitié de l'onde est transmise au milieu 2, l'autre moitié est réfléchie
 - La majeure partie de l'onde est transmise au milieu 2
5. Quelles types d'énergies sont-elles converties par un élément piezo-électrique ?
- Lumineuse en électrique et inversement
 - Mécanique en électrique et inversement
 - Thermique en mécanique et inversement
 - Hydraulique en électrique et inversement
6. Comment augmenter l'énergie moyenne du spectre émis par un tube à rayons X ?
- En augmentant la tension entre l'anode et la cathode.
 - En augmentant le courant.
 - En refroidissant le tube.
 - En plaçant un filtre en molybdène entre l'objet et le détecteur.
 - En plaçant un filtre en molybdène entre le tube et l'objet.
 - Il n'y a rien à faire, sauf à changer de tube.
7. On dispose d'un algorithme de reconstruction par rétroprojection filtrée. Comment réduire le temps d'acquisition ?
- En diminuant le nombre d'angles de vue acquis.
 - En augmentant le nombre d'angles de vue acquis.
 - En diminuant le nombre de pixels du détecteur.
 - En augmentant le nombre de pixels du détecteur.
 - En utilisant un algorithme de reconstruction rapide.