PRENOM : NOM :

Examen Théorie de l'Information

Documents et calculatrices autorisés, durée 45 minutes

Correction Correction Correction Correction Correction Correction Correction

I- Exercice Codage LZ

Donner les 12 premiers mots du dictionnaire obtenu pour le codage LZ de la séquence suivante et les codes transmis (s'arrêter quand le dictionnaire à une taille de 12) :

0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1 1 . . .

Séquence codée : a a b c f e c h d i

Dictionnaire :

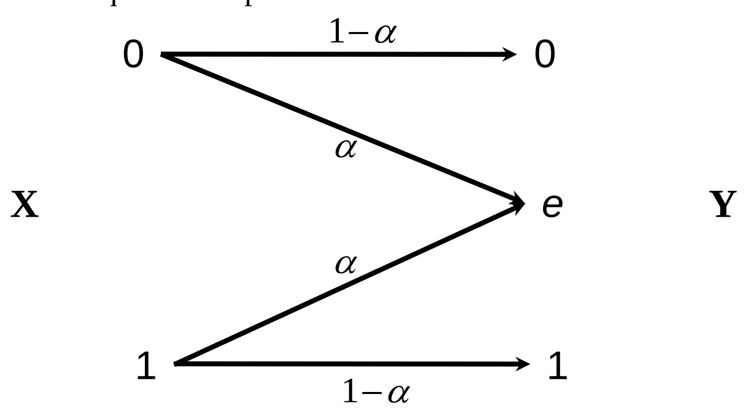
0	→a
1	→b
00	→c
01	→d
10	→e
000	→f
0001	→g
100	→h
001	→i
1000	→j
010	→k
0011	→l

II- Exercice Capacité d'un canal

Canal type « binary erasure channel », canal binaire avec perte.

On étudie la capacité d'un canal nommé *« binary erasure channel »* dont la modélisation est donnée en figure 1. Par rapport au un canal binaire symétrique, ce type de canal modélise un cana l de transmission où des bits peuvent être « perdus » au lieu d'être corrompus.

Ce canal est constitué en entrée de deux symboles et de trois symboles en sortie. Ainsi, le récepteur connait les bits qui ont été perdus.



Modèle de canal binaire avec perte de symbole.

PRENOM : NOM :

Le but de cet exercice est :

- dans la première partie, de calculer la capacité de ce canal (pas trivial à cause du symbole '*e*', mais intuitivement simple ! : $C = 1-\alpha$, isn't it ?),
- dans la deuxième partie, d'étudier l'effet d'un *feedback* sur la capacité du canal.

Première Partie : Capacité

a) Ecrire la matrice P[**Y/X**] du canal où **X**, respectivement **Y**, représente la variable aléatoire pour les données d'entrée et de sortie.

b) En calculant H(**Y/X**) montrer que cette entropie est identique à H(**Y/X**) d'un canal binaire symétrique 'normal' (sans perte de symbole).

H(Y/X) = -SSp(xi).p(yj/xi).log(p(yj/xi)) = - p('0').((1-a).log(1-a) + (a.log(a)) - p('1').((1-a).log(1-a) + (a.log(a))

= -(1-a).log(1-a) - a.log(a) ➔ identique à H(Y/X) du canal binaire symétrique du cours

c) La capacité du canal se calcule à partir de la formule suivante :

$$C = \max_{p(x)} \left(I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) \right)$$

Où *I* représente la transinformation et *p(x)* représente la distribution de **X**.

➔ Exprimer la capacité *C* avec H(**Y**) et H(**Y/X**) puis donner la valeur maximum théorique de H(**Y**).

C=max(H(Y) – H(Y/X))= max (H(Y)) – H(Y/X). Max théorique de H(Y)=$\log_2(3)$

d) Le maximum théorique de H(**Y**) ne peut pas être atteint par un quelconque choix de *p(x)*. Pour obtenir la bonne expression de H(**Y**), il faut prendre en compte les probabilités de **X** et l'évènement {**Y**=*e*}.

➔ En notant *p* la probabilité d'apparition du symbole '1' en entrée (c.-à-d. p(**X**='1') = *p*), exprimer p(**Y**='0'), p(**Y**='1') et p(**Y**='*e*')

➔ Montrer que H(**Y**) peut se mettre sous la forme :

$$H(Y) = -(1-\alpha).(1-p).\log_2(1-p) - (1-\alpha).p.\log_2(p) - (1-\alpha).\log_2(1-\alpha) - \alpha.\log_2(\alpha)$$

Rappel… : log(a.b) = log(a) + log(b)

P('1') = p.(1-a)
P('0') = (1-p).(1-a)
P('e') = a

H(Y) = - (1-p).(1-a).log((1-p).(1-a)) - p.(1-a).log(p.(1-a)) - a.log(a)

= - (1-p).(1-a).log(1-p) - (1-p).(1-a).log(1-a) - p.(1-a).log(p) - p.(1-a).log(1-a) - a.log(a)

= - (1-a).(1-p).log(1-p) - (1-a).p.log(p) - (1-a).log(1-a)((1-p) + p) - a.log(a)

e) A partir des questions précédentes, en déduire que la capacité du canal est $C = 1-\alpha$, donner la valeur de *p* permettant d'obtenir *C*.

C = max[- (1-a).(1-p).log(1-p) - (1-a).p.log(p) - (1-a).log(1-a) - a.log(a)
+ (1-a).log(1-a) + a.log(a)]

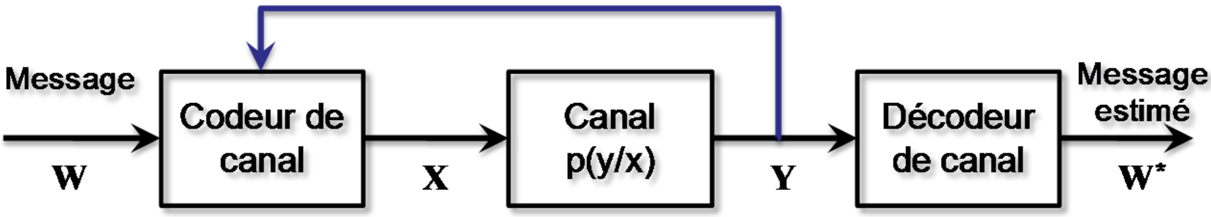
= max[- (1-a).(1-p).log(1-p) - (1-a).p.log(p)]

= 1 – a pour p=1/2

PRENOM : NOM :

Seconde Partie : *Feedback*

Pour améliorer le taux de transmission, on propose l'ajout d'une boucle de retour (*feedback*) tel que présenté sur la figure suivante :



f) Par rapport au canal étudié, et sous l'hypothèse d'une transmission instantanée et sans mémoire, décrire la manière dont sera utilisé le *feedback*.

Quand 'e' est recu, on demande la réémission du dernier symbole.

g) En s'appuyant sur la réponse précédente, justifier que la capacité du canal avec *feedback* C_{FB} est $C_{FB} = C$.

La valeur max de I(X ;Y) s'obtiendra toujours pour les mêmes conditions et valeurs que pour C : la capacité est max si p=1/2 et a le plus petit possible car ainsi il n'y a pas de réémission de symbole. C_{FB}=C=1-a.

Les caractéristiques du canal ne sont pas modifiées par l'ajout d'un feedback (le feedback ne modifie pas 'a') donc la capacité reste la même (autant de '0' que de '1' à réémettre en entrée car P(Y='e') ne dépend pas de p(x)).

h) Quelque soit le canal $C_{FB} = C$. Conclure sur l'intérêt d'un *feedback* dans une transmission.

Le feedback ne modifie pas les propriétés du canal, donc ne modifie pas la capacité, cependant, il facilite le codage/décodage ! Explications :

On pourrait s'attendre à ce que le feedback diminue la capacité en disant qu'il y de nombreuse ré émission, or ce n'est pas le cas car la capacité ne prend pas en compte la quantité de symboles.

De même on pourrait s'attendre à ce que la capacité augmente puisque le canal transmet mieux (tous les symboles arrivent sans ambiguïté). Or ceci ne relève pas de la capacité mais du décodage de canal.

Ainsi, on arrive, grâce à un feedback, à un décodage quasi certain (ca dépend des canaux et de la faisabilité du feedback…) sans modifier la capacité !

D'un point de vue capacité, le Feedback ne sert à rien ; il facilite juste le décodage.