Théorie de l'information

Exercices

Exercices A

Exercice n° A.1

Dans un processus d'automatisation, une source génère de façon indépendante quatre niveaux de tension :

x_1=1 V, x_2=2 V, x_3=3 V, x_4=4 V.

La durée du niveau x_1 est t_1=1ms, celle du niveau x_2 est t_2=0,5 ms, celle du niveau x_3 est t_3=0,1 ms et enfin, celle du niveau x_4 est t_4=1 ms.

Les niveaux ci-dessus sont générés avec les probabilités suivantes :

$$p(x_1) = \frac{1}{8},\ p(x_2) = \frac{1}{4},\ p(x_3) = \frac{1}{2},\ p(x_4) = \frac{1}{8}$$

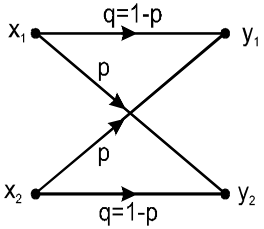
a) Après une succession de 10 symboles, la source se met au repos (émet le niveau 0) pendant 15 ms. Quel est le débit d'information de cette source ?

Exercice n° A.2

Un signal vidéo est transmis au travers un filtre idéal passe-bas ayant la fréquence de coupure de 5 MHz, après quoi il est échantillonné à la fréquence de Nyquist (2xFc=10 MHz). Les échantillons sont quantifiés uniformément par un dispositif de quantification uniforme possédant 256 niveaux et codés sur 8 bits.

a) Calculez le débit de la source vidéo ainsi numérisée ?

Exercice n° A.3 : *Canal binaire symétrique*
Le schéma suivant représente la forme générale d'un canal binaire symétrique et permet d'obtenir la matrice de bruit [P(Y/X)].



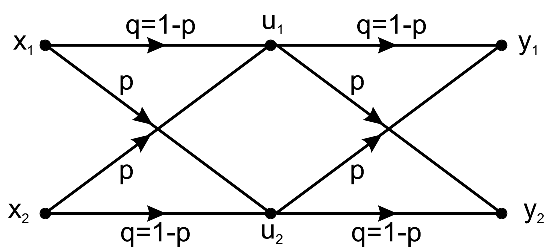
a) Calculez la capacité C de ce canal. Que remarquez vous ?
b) Représentez la courbe C=f(p). Commentez les points d'intérêt.
c) Pour quelles valleurs de p(x) et de p(y) la transinformation est elle maximale ?

d) Application numérique
Avec la matrice de bruit suivante :

$$[P(Y/X)] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [P(X)] = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Calculez :
- l'entropie du champ à l'entrée du canal
- l'entropie du champ à la sortie du canal
- l'entropie conjointe
- l'erreur moyenne et l'équivoque
- la transinformation
- la capacité du canal
- la redondance et l'efficacité de ce canal.
- Comment faut il modifier P[X] pour utiliser au mieux le canal.

Exercice n° A.4
Deux canaux binaires symétriques, ayant la même capacité C sont reliés en cascade.



a) Quel est la valeur de la capacité résultante ?

c) Calculez la capacité d'un seul canal et celle du canal résultant pour p=0,1.

Exercices B

Exercice n° B.1 : *Codage optimal*
Une source S génère 7 symboles s_i avec les probabilités suivantes : $p(s_1)=1/3$, $p(s_2)=1/3$, $p(s_3)=1/9$, $p(s_4)=1/9$, $p(s_5)=1/27$, $p(s_6)=1/27$, $p(s_7)=1/27$.

a) Construire un code binaire optimal et calculer son efficacité et sa redondance.

b) Construire un code optimal ayant l'alphabet $X=\{A,B,C\}$ et calculer son efficacité.

Exercice n° B.2 : *Codage de source Qaire*
Une source binaire S_1 génère les symboles s_1 et s_2 avec les probabilités $p(s_1)=0{,}9$ et $p(s_2)=0{,}1$. Les deux symboles sont indépendants.

a) Calculer l'entropie de la source S1 puis celle des sources S_2 et S_3 respectivement constituées de n=2 puis n=3 symboles de la source S_1.

b) Calculer les codes de Huffman associés à S_1, S_2, S_3 ainsi que leur efficacité et la longueur moyenne des mots-codes. Conclusion.

Exercice n° B.3 : *Efficacité*
Une source S génère de manière indépendante 6 symboles s_i avec les probabilités suivantes : $p(s_1)=0.40$, $p(s_2)=??$, $p(s_3)=0.25$, $p(s_4)=??$, $p(s_5)=0.15$, $p(s_6)=0.1$.

a) Quelles sont les valeurs des probabilités $p(s_2)$ et $p(s_4)$ qui permettront d'avoir le codeur binaire d'Huffman le plus efficace ?
b) Quelle est cette efficacité ?

Exercice n° B.4 : *Codage LZW d'une source binaire*
Une source binaire S génère de manière indépendante 2 symboles '0' et '1'. Voici un début de message émis par cette source et qui est codé par un codeur LZW.
0100010010010110101010010101010100100 …..

a) Donnez les 10 premiers mots du dictionnaire de ce codeur et proposez un codage des mots du dictionnaire.

b) Donnez alors le code de ce message.

Exercices C

Exercice C.1 : *Code de Hamming*

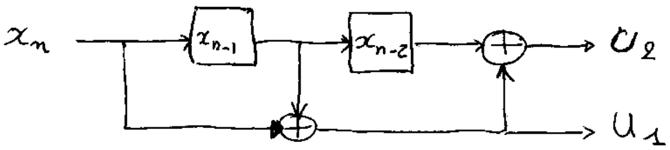
Soient la source S qui émet les cinq symboles suivants et leur code associé :

S_i	C_i
A	000
B	001
C	010
F	011
E	100

a) Détermine les codes associés à chaque lettre lorsque l'on met en œuvre un codeur de Hamming systématique.
b) Donnez l'expression des correcteurs.
c) Quelle est la distance minimale de ce code ?
d) Quel est son taux d'émission R = (Nbre de symboles d'info) / (longueur de mot-code) ?
e) On désire en plus de la correction d'une erreur, détecter toutes les erreurs affectant un nombre impair de bits. Proposez une solution et les mots-codes associés. Quel sont le nouveau taux d'émission et la distance minimale de ce nouveau code ?
f) Commentez les différents scénarios possibles au décodage.

Exercice C.2 : *Code convolutif*

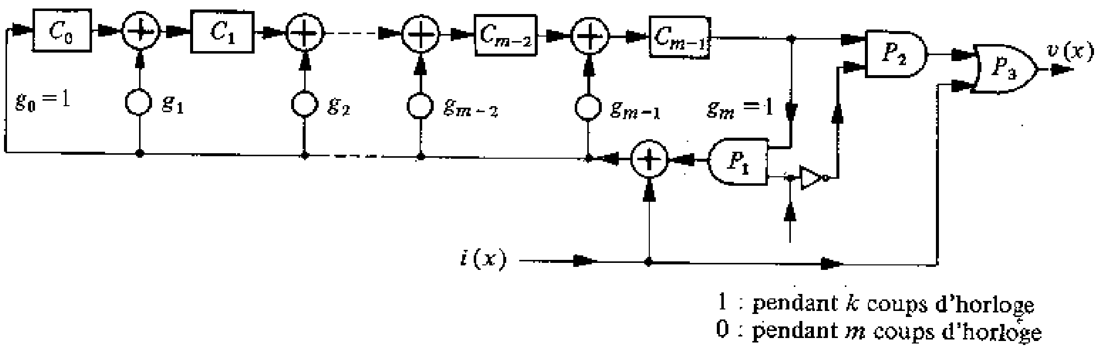
Soit le codeur convolutif suivant :



a) Quelles sont les relations entre u1, u2 et les symboles d'information ? En déduire la matrice de codage. Quel est le taux d'émission de ce codeur et la contrainte ?
b) Donnez le diagramme d'état de ce codeur.
c) En déduire si les bouts de séquence suivants ont pu être générés par ce codeur :
   1) 11100001
   2) 11011011
   3) 11001001
d) On applique l'algorithme de Vitterbi tous les 3 tops d'horloge. Le décodeur étant dans l'état 00, comment va t-il corriger 001010 ?
e) Ce résultat était t-il prévisible ?
f) Que peut on faire pour améliorer la capacité de décodage ? Quelle en est la conséquence ? Quelle est la limite de correction de ce codeur ?

Exercice C.3 : *Code cyclique*

Le '(n-k) stage shift register encoding circuit' est un circuit de codage par division utilisé dans les satellites pour son faible coût de mise en œuvre. Un schéma général de ce type de circuit est donné ci-dessous.



Durant l'introduction des k symboles d'information, la porte P_1 reste ouverte et le circuit calcule le reste de la division qui apparaît au coup d'horloge k+1, lorsque la porte P_2 est ouverte tandis que la porte P_1 est fermée. La porte P_2 reste ouverte durant m coups d'horloge pour permettre d'évacuer le registre, plus exactement les symboles de contrôle. Ces derniers sont placés, par le truchement de la porte P_3, à la suite des symboles d'information pour former un mot-code systématique.

Soit un codeur à circuit de division par le polynôme $g(x)=x^3+x^2+1$ avec $n=7$, conformément au schéma précédant :

a) Tracer le schéma particulier pour le cas étudié.

b) Trouver au moyen de ce schéma , les valeurs des symboles de contrôle a_0, a_1 et a_2 en fonction des symboles d'information a_3, a_4, a_5 et a_6. (a_6 étant le symbole d'information qui entre au premier top d'horloge)

c) Soit le mot d'information I=[1 0 0 1], donner le mot-code obtenu avec $g(x)=x^3+x^2+1$ par codage par division.

d) En utilisant un codage par division, donnant les expressions générales liants caractères de contrôle et d'information.

e) Même question que c) en effectuant un codage par multiplication. Remarques par rapport au mot obtenu en c) ?

f) Avec le même polynôme g(x), pour un codage par multiplication, donnez l'expression générale des élément du mot-code en fonction des symboles d'information.

g) Comment décode t-on les mot-codes après un codage par division ? par multiplication ?

Vérifiez que les mot-codes générés en c) et e) sont décodables.